WYKŁAD 18, 19

CAŁKA RIEMANNA Z PARAMETREM

10 i 13 maja

W najbliższym czasie zajmować się będziemy tzw całkami z parametrem tzn funkcjami zdefiniowanymi przy pomocy całki. Jako przykłady weźmy

(1) Całka Dirichleta $D(a)=\int_0^\infty \frac{\sin(ax)}{x}\,dx$

(2) Funkcja Γ (Gamma) Eulera $\Gamma(x)=\int_0^\infty t^{x-1}e^{-t}\,dt$

Funkcja ważna z różnych powodów, także dlatego, że jest „uogólnieniem" silni na niecałkowite argumenty.
Dobrze by było znać własności tej funkcji

posługując się metodami odpowiednimi dla całek z parametrem można wyliczyć wartość tej całki, czego tradycyjnie nie umiemy zrobić

Żeby nabrać motywacji do formułowania i dowodzenia twierdzeń zróbmy pewien rachunek dotyczący całki Dirichleta nie zajmując się na razie jego poprawnością.

Dla $b\geq 0$ zdefiniujmy funkcję $f(a,b,x)=e^{-bx}\frac{\sin(ax)}{x}$ i rozważmy całkę

$$F(a,b)=\int_0^\infty f(a,b,x)\,dx=\int_0^\infty e^{-bx}\frac{\sin(ax)}{x}\,dx$$ Nie bardzo umiemy to policzyć

ale $$\frac{\partial F}{\partial a}=\frac{\partial}{\partial a}\left(\int_0^\infty f(a,b,x)\,dx\right)\overset{?}{=}\int_0^\infty \frac{\partial f}{\partial a}(a,b,x)\,dx=\int_0^\infty e^{-bx}\cdot a\cdot\cos(ax)\,dx=$$

$$\int e^{-bx}\cos(ax)\,dx= Ae^{-bx}\cos(ax)+Be^{-bx}\sin(ax) \Rightarrow e^{-bx}\cos(ax)=$$

$$e^{-bx}\left(Aa(-\sin(ax))+A(-b)\cos(ax)+B(-b)\sin(ax)+Ba\cos(ax)\right)=$$

$$e^{-bx}\left((-Aa-Bb)\sin(ax)+(-Ab+Ba)\cos(ax)\right)\qquad \begin{array}{l}-Aa-Bb=0\\ -Ab+Ba=1\end{array}$$

$$-Aa - Bb = 0$$
$$-Ab + Ba = 1$$

$$\begin{bmatrix} -a & -b \\ -b & a \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} = \frac{1}{-a^2-b^2}\begin{bmatrix} a & b \\ b & -a \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{-1}{a^2+b^2}\begin{bmatrix} b \\ -a \end{bmatrix}$$

$$A = \frac{-b}{a^2+b^2} \qquad B = \frac{+a}{a^2+b^2} \qquad \ldots = e^{-bx}\left(\frac{-b}{a^2+b^2}\cos(ax) + \frac{a}{a^2+b^2}\sin(ax)\right)\Big|_0^\infty =$$

$$= -\left(-\frac{b}{a^2+b^2} - 0\right) = \frac{b}{a^2+b^2}$$

$$\frac{\partial F}{\partial a} = \frac{b}{a^2+b^2} \Rightarrow F(a,b) = \int \frac{b}{a^2+b^2}\,da = \operatorname{arctg}\left(\frac{a}{b}\right) + c(b)$$

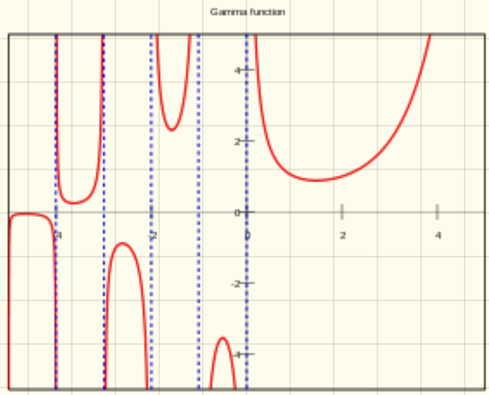
Ale $F(0,b)=0$ więc $c(b)=0$ $\qquad F(a,b) = \operatorname{arctg}\left(\frac{a}{b}\right)$

$$D(a) \overset{?}{=} \lim_{b\to 0} F(a,b) = \frac{\pi}{2}\operatorname{sgn}(a)$$

W szczególności
$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx = \frac{\pi}{2}$$

Pozostaję znaki zapytanie, które należy rozważyć. Pierwszy dotyczy różniczkowanie pod znakiem całki, drugi przechodzenie do granicy pod znakiem całki.

W przykładzie (2) chcielibyśmy wnioskować o własnościach funkcji Γ na podstawie jej definicji. Ciągłość, różniczkowalność, granice ...



Zacznijmy od prostszej całki z parametrem na przedziale zwartym.

$I = [a,b] \quad J =]\alpha, \beta[\quad f : I \times J \to \mathbb{R}$

$$F(x) = \int_a^b f(t,x)\,dt$$

Interesuje nas ciągłość i różniczkowalność funkcji $F : J \to \mathbb{R}$
Ciągłość F w $x_0 \in J$ oznacza, że

$$\lim_{x \to x_0} F(x) = F(x_0) = \int_a^b f(t,x_0)\,dt \underset{\underset{f \text{ ciągła}}{\uparrow}}{=} \int_a^b \lim_{x \to x_0} f(t,x)\,dt$$

czyli można wchodzić z granicą pod znak całki. Dla zwartego I twierdzenie jest łatwe:

FAKT: Jeśli f jest ciągła na $I \times J$ to F jest ciągła na J.

DOWÓD: Weźmy $x_0 \in J$ i rozważmy $f|_{I \times [x_0 - h, x_0 + h]}$ dla h wystarczająco małego aby $[x_0-h, x_0+h] \subset J$

f jest ciągła a zbiór $I \times \overbrace{[x_0-h, x_0+h]}^{=K}$ jest zwarty zatem f jest jednostajnie ciągła na $I \times K$. Warunek jednostajnej ciągłości ma postać:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \forall (x,\alpha), (x',\alpha') \ \exists \delta > 0 : \ d\big((x,\alpha),(x',\alpha')\big) < \delta \Rightarrow |f(x,\alpha) - f(x',\alpha')| < \varepsilon$$

Metrykę d można wziąć np $d\big((x,\alpha),(x',\alpha')\big) = \max\{|x-x'|, |\alpha - \alpha'|\}$
Ustalmy $\varepsilon > 0$

$$|F(x) - F(x_0)| = \left| \int_a^b \big(f(t,x) - f(t,x_0)\big)\,dx \right| \leqslant \int_a^b |f(t,x) - f(t,x_0)|\,dt \leqslant *$$

$d\big((t,x),(t,x_0)\big) = |x - x_0|$ zatem jeśli $|x - x_0| < \delta$ to $|f(t,x) - f(t,x_0)| < \varepsilon$

$* \leq (b-a)\varepsilon$

$\uparrow$ może być dowolnie małe, więc F ciągła w x_0. ■

W praktyce zdarza się, że granice całkowania zależą od parametru. Załóżmy, że

$$F(x) = \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(t,x)\,dt \quad , \quad \forall x \in J \quad [\varphi(x), \psi(x)] \subset I = [a,b]$$

FAKT: W powyższej sytuacji, jeśli φ, ψ są ciągłe na J i f ciągła na $I \times J$ to F ciągła na J.

DOWÓD: $t_0 \in J$

$$F(t) = \int_{\varphi(x)}^{\varphi(x_0)} f(t,x)\,dt + \int_{\varphi(x_0)}^{\psi(x_0)} f(t,x)\,dt + \int_{\psi(x_0)}^{\psi(x)} f(t,x)\,dt$$

$\exists \xi(x_0) \in [\varphi(x), \varphi(x_0)]$:

$$\int_{\varphi(x)}^{\varphi(x_0)} f(t,x)\,dt = f(\xi(x_0), x)\underbrace{(\varphi(x_0) - \varphi(x))}$$

Dla $x \to x_0$: $f(\xi(x_0), x) \to f(\varphi(x_0), x_0)$, $\varphi(x_0) - \varphi(x) \to 0$

bo f ciągła i $\xi(x) \to \varphi(x_0)$

bo φ ciągła

$$\int_{\varphi(x)}^{\varphi(x_0)} f(t,x)\,dt \xrightarrow{x \to x_0} 0$$

$\downarrow x \to x_0$

$$\int_{\varphi(x_0)}^{\psi(x_0)} f(t,x_0)\,dt$$

na mocy poprzedniego faktu

jak dla φ. ■

W przykładzie 1 zobaczyliśmy, że ważne jest także różniczkowanie po parametrze, przy czym nie tylko chodzi o samą różniczkowalność F ale wręcz o możliwość policzenie całki. Czasem funkcję $\frac{\partial f}{\partial x}$ jest łatwiej scałkować pot niż funkcję f. Odpowiednie twierdzenie w wersji zwartej ma postać

FAKT: Jeśli f jest ciągła na $I\times J$ oraz dla $x\in J$ istnieje $\frac{\partial f}{\partial x}$ i jest ciągła na $I\times J$ to F jest różniczkowalna oraz zachodzi

$$F'(x)=\int_a^b \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\,dt$$

reszta?

DOWÓD:

$$\left|\underbrace{F(x+h)-F(x)-\left(\int_a^b \frac{\partial f}{\partial x}(t,x)\,dt\right)h}\right| =$$

$$=\left|\int_a^b \left(f(t,x+h)-f(t,x)-\frac{\partial f}{\partial x}(t,x)\cdot h\right)dt\right| \leq \int_a^b \left|\underbrace{f(t,x+h)-f(t,x)}-\frac{\partial f}{\partial x}(t,x)h\right| dt$$

$$f(t,x+h)-f(t,x)=\frac{\partial f}{\partial x}(t,\xi(h))h \quad \xi(h)\in[x,x+h]$$

tw. Lagrange'a

$$=\int_a^b \left|\frac{\partial f}{\partial x}(t,\xi(h))-\frac{\partial f}{\partial x}(t,x)\right||h|\,dt < (b-a)\varepsilon\cdot|h|$$

ustalamy $\varepsilon>0$ i bierzemy δ taką że dla $h<\delta$ mamy $\left|\frac{\partial f}{\partial x}(t,x+h)-\frac{\partial f}{\partial x}(t,x)\right|<\varepsilon$. To można zrobić bo $\frac{\partial f}{\partial x}\Big|_{I\times[x-h_1,x+h_1]}$ jest jednostajnie ciągła.

Wyrażenie $\sqcup$ jest więc resztą i $F'(x)=\int_a^b \frac{\partial f}{\partial x}(t,x)\,dt$. ∎

Istnieje też wersja dla ruchomych granic całkowania.

FAKT: Jeśli f jest ciągła na $I\times J$, φ, ψ są różniczkowalne na J oraz $[\varphi(x), \psi(x)] \subset I$,
$\forall x\in J$ $\frac{\partial f}{\partial x}$ istnieje i jest ciągła na $I\times J$ to

$$F(x)=\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(t,x)\,dt$$ jest różniczkowalna oraz

$$F'(x) = \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} \frac{\partial f}{\partial x}(t,x)\,dt + \psi'(x) f(\psi(x),x) - \varphi'(x) f(\varphi(x),x)$$

DOWÓD: Pomijamy, patrz zielony skrypt.

Pora przejść do tego, co naprawdę interesujące czyli do niewłaściwych całek z parametrem. Tak się jakoś składa, że większość interesujących całek, w tym nasze przykłady, są po odcinku otwartym.

Przypomnijmy, że całkę po przedziale otwartym (może być nieskończony) definiowaliśmy jako granicę pewnego ciągu uogólnionego. Dokładniej

$$\mathcal{K}=\{K : K\subset I \text{ i } K \text{ zwarty}\} \qquad K > K' \iff K'\subset K$$

$$\int_I f = \lim_{(\mathcal{K},>)} \int_K f$$

W szczególności mówimy, że $\int_I f$ jest zbieżna jeśli $\forall \varepsilon>0\ \exists K : \forall K', K'' > K$

$$\left| \int_{K'} f - \int_{K''} f \right| < \varepsilon$$

Niech teraz I otwarty, $J =]\alpha,\beta[$ $f: I\times J \longrightarrow \mathbb{R}$ f taka, że $\forall x\in J$ $f(\cdot,x)$ całkowalna na $K\subset I$ oraz $\int_I f(\cdot,x)$ zbieżne

Definiujemy $F(x) = \int_I f(\cdot, x)$. Interesują nas te same pytanie – czy F jest ciągłe i czy jest różniczkowalne. Sytuacje przypomina nieco problem szeregów funkcyjnych, tyle że teraz sumowanie po dyskretnym parametrze n zastąpione jest przez całkę po ciągłym parametrze t. Podobnie jak wtedy, tak i teraz kluczowe jest pojęcie jednostajnej zbieżności (szeregu) całki

DEFINICJA Niech $f: I \times J \to \mathbb{R}$ będzie odpowiednio całkowalne. Mówimy że $F(x) = \int_I f(x, \cdot)$ jest zbieżne jednostajnie jeśli

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists K \; \forall K', K'' > K \; \forall x \in J \; \left| \int_{K'} f(\cdot, x) - \int_{K''} f(\cdot, x) \right| < \varepsilon$$

nie zależy od x

Odpowiednie twierdzenie dotyczące ciągłości i różniczkowalności mają postać:

TWIERDZENIE: Jeśli $f: I \times J \to \mathbb{R}$ jest ciągła i całka $F(x) = \int_I f(\cdot, x)$ jest zbieżna jednostajnie to funkcja f jest ciągła na J

DOWÓD: Przebiega identycznie jak dowód ciągłości granicy ciągu jednostajnie zbieżnego funkcji ciągłych. Funkcje $x \mapsto \int_K f(\cdot, x)$ $K \subset I$ są ciągłe na mocy poprzedniego twierdzenia dotyczącego ciągłości „zwartej" całki z parametrem.

TWIERDZENIE Jeśli $f: I \times J \to \mathbb{R}$ jest ciągła, całka $F(x)$ jest zb. jednostajnie, pochodna $\frac{\partial f}{\partial x}$ istnieje i jest ciągła oraz całka $\int_I \frac{\partial f}{\partial x}(\cdot, x)$ jest zbieżna jednostajnie to F jest funkcją różniczkowalną i $F'(x) = \int_I \frac{\partial f}{\partial x}(\cdot, x)$

DOWÓD: Z poprzednich twierdzeń wynika, że $\forall K \subset I$ $x \overset{F_K}{\longmapsto} \int_K f(\cdot, x)$ jest różniczkowalna i jej pochodna to $x \overset{F_K'}{\longmapsto} \int_K \frac{\partial f}{\partial x}(\cdot, x)$.
$F_K' \longrightarrow \int_I \frac{\partial f}{\partial x}(\cdot, x)$ jednostajnie. Z twierdzeń o zbieżności jednostajnej ciągu funkcji różniczkowalnych (dotyczą także ciągów uogólnionych) wynika że $F(x) = \int_I f(\cdot, x)$ jest różniczkowalna i jej pochodna to $F'(x) = \int_I \frac{\partial f}{\partial x}(\cdot, x)$ ∎

Pozostaje więc zająć się jednostajną zbieżnością całek. Mamy do dyspozycji kryteria podobne do tych dla szeregów funkcyjnych

(1) KRYTERIUM WEIERSTRASSA: Jeśli istnieje funkcja dodatnia $\varphi: I \to \mathbb{R}$ taka, że $\int_I \varphi < \infty$ oraz $|f(t,x)| \leq \varphi(t)$ dla $x \in J$ i wszystkich t poza, być może, zwartym przedziałem $K_0 \subset I$ to $\int_I f(\cdot, x)$ jest zbieżne

(2) KRYTERIUM DINIEGO Jeśli $f: I \times J \to \mathbb{R}$ jest nieujemne, $F(x) = \int_I f(\cdot, x)$ jest zbieżne i F jest ciągłe to F jest zbieżne niemal jednostajnie.

(3) KRYTERIUM ABELA $\varphi: [a, \infty[\times J \to \mathbb{R}$; $g: [a,\infty[\times J \to \mathbb{R}$ Jeśli $\Phi(x) = \int_a^\infty \varphi(t,x)\,dt$ jest zbieżne jednostajnie a g jest ograniczone i monotoniczne ze względu na t to

$$F(x) = \int_a^\infty \varphi(t,x) g(t,x)\,dt$$

jest zbieżne jednostajnie

(4) KRYTERIUM DIRICHLETA: $\varphi: [a, \infty[\times J \to \mathbb{R}$, $g: [a, \infty[\times J \to \mathbb{R}$. Jeśli istnieje $M > 0$ takie, że $\forall R > a$

$$\left| \int_a^R \varphi(t,x)\,dt \right| < M$$ oraz g jest monotoniczna ze względu na t i

$\lim_{t \to \infty} g(t,x) = 0$ i zbieżność jest jednostajna ze względu na x to

$$F(x) = \int_a^\infty \varphi(t,x) g(t,x)\,dt$$

jest zbieżne jednostajnie

Zanim przejdziemy do dowodów wróćmy do przykładu z całką Dirichleta było tam parę znaków zapytania.

$$F(a,b) = \int_0^\infty e^{-bt} \frac{\sin(at)}{t}\,dt \qquad \begin{matrix} a \in \mathbb{R} \\ b \in [0, \infty[\end{matrix} \qquad D(a) = \int_0^\infty \frac{\sin(at)}{t}\,dt$$

Po pierwsze czy $\lim_{b \to 0^+} F(a,b) \overset{?}{=} D(a)$

Sprawdzić należy więc czy F jest ciągła ze względu na b. Jednostajna zbieżność F ze względu na b wynika z kryterium Abela. Jako φ bierzemy $\varphi(b,t) = \frac{\sin(at)}{x}$ i wiemy, że $\Phi(b) = \int_0^\infty \frac{\sin(at)}{t}\,dt$ jest zbieżna jednostajnie ze względu na b (bo od b nie zależy) oraz $g(b,t) = e^{-bt}$ jest monotoniczna ze względu na t zatem

$F(a,b)$ jest zbieżna jednostajnie ze względu na b i wobec tego ciągła ze względu na b. Mamy więc

$$\lim_{b \to 0^+} F(a,b) = \int_0^\infty \frac{\sin(at)}{t}\,dt$$

Dalej różniczkowalność: Dla ustalonego $b>0$ $\frac{\partial}{\partial a}\left(e^{-tb}\frac{\sin(at)}{t}\right) =$

$= e^{-tb}\cos(at)$. $|e^{-tb}\cos(at)| \leq e^{-tb} = \varphi(t)$ całkowalne zatem

$F(a,b)$ jest różniczkowalna ze względu na a i mamy wzór

$$\frac{\partial F}{\partial a} = \int_0^\infty e^{-bt}\cos(at)\,dt$$