WYKŁAD 22

ZBIORY J-MIERZALNE, TW FUBINIEGO

24 maja

PO JAKICH ZBIORACH WOLNO CAŁKOWAĆ?

Całka Riemanna zdefiniowana została dla funkcji ograniczonej na kostce $D \subset \mathbb{R}^n$. W toku analizowania tego pojęcia okazało się, że całkowalne są funkcje, których zbiór punktów nieciągłości jest miary Lesbegue'a 0. Posługując się tym twierdzeniem możemy rozszerzyć klasę zbiorów po których można całkować. W dalszym ciągu zakładać będziemy, że zbiór K po którym całkujemy jest ograniczony, tzn istnieje kostka $D \subset \mathbb{R}^n$ taka, że $K \subset D$.

FUNKCJA CHARAKTERYSTYCZNA: $\chi_K : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ $\quad \chi_K(x) = \begin{cases} 1 & x \in K \\ 0 & x \notin K \end{cases}$

„Pomysłem" na $\int_K f$ jest $\int_D \chi_K f$. Z całą pewnością do tej całki nie dają wkładu wartości f spoza K. W ogóle f nie musi być określone poza K. Zawsze można rozszerzyć na D kładąc wartość zero dla $x \notin K$. Nie ma to wpływu na wartość $\chi_K f$ ani na ewentualną całkowalność. Warunki na K dostajemy analizując całkowalność funkcji $\chi_K f$ dla $f \in \mathcal{R}(D)$

TWIERDZENIE: $\forall f \in D \;\; \chi_K f \in \mathcal{R}(D) \Leftrightarrow \partial K$ jest zbiorem miary zero

DOWÓD Oznaczamy $\mathcal{N}(f)$ - zbiór punktów nieciągłości funkcji f. Jest jasne, że $\mathcal{N}(\chi_K f) \subset \mathcal{N}(\chi_K) \cup \mathcal{N}(f)$. Ponadto $\mathcal{N}(\chi_K) = \partial K$

$\Rightarrow$ Weźmy jako f funkcję stałą $f(x) = c$. Wówczas $f \in \mathcal{R}(D)$ bo $\mathcal{N}(f) = \emptyset$. Mamy też $\mathcal{N}(\chi_K f) = \mathcal{N}(\chi_K) = \partial K$. Całkowalność $\chi_K f$ oznacza że ∂K jest miary zero.

$\Leftarrow$ Jeśli ∂K miary zero to $\chi_K \in \mathcal{R}(D)$ bo $\mathcal{N}(\chi_K)$ miary zero. Skoro $f \in \mathcal{R}(D)$ to także $\mathcal{N}(f)$ miary zero. $\mathcal{N}(f) \cup \mathcal{N}(\chi_K)$ miary zero (bo suma zbiorów miary zero). $\mathcal{N}(f\chi_K)$ miary zero (bo podzbiór zbioru miary zero) ■

Całkować można po zbiorach ograniczonych, których brzeg jest miary zero! 2

Takie zbiory nazywamy mierzalnymi w sensie Jordana (albo jordanowsko mierzalnymi albo J-mierzalnymi)

Jeśli $K \subset \mathbb{R}^n$ jest j-mierzalny to liczbę $m(K) = \int_D \chi_K = \int_K 1$ nazywamy miarą Jordana funkcji f.

WŁASNOŚCI ZBIORÓW J-MIERZALNYCH: Jeśli K, L są J-mierzalne to (1) $K \cap L$ jest J-mierzalny, (2) $K \cup L$ jest J-mierzalny (3) $K \setminus L$ jest J-mierzalny. Ponadto, jeśli $K \cap L = \emptyset$ to $m(K \cup L) = m(K) + m(L)$
$m(K \setminus L) = m(K) - m(K \cap L)$

DOWÓD: $\partial K = \overline{K} \setminus \mathrm{Int}(K)$

(1) $\partial(K \cap L) = \overline{K \cap L} \setminus \mathrm{Int}(K \cap L) \subset \overline{K} \cap \overline{L} \setminus \mathrm{Int}(K \cap L) = (\overline{K} \cap \overline{L}) \setminus (\mathrm{Int} K) \cap (\mathrm{Int} L)$

$\overline{K \cap L} \subset \overline{K} \cap \overline{L}$

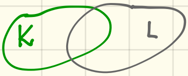
$\mathrm{Int}(K \cap L) = \mathrm{Int} K \cap \mathrm{Int} L$

$= \left[(\overline{K} \cap \overline{L}) \setminus \mathrm{Int} K\right] \cup \left[(\overline{K} \cap \overline{L}) \setminus \mathrm{Int} L\right] \subset \partial K \cup \partial L$ tan jeśli ∂K i ∂L są miary zero to $\partial(K \cap L)$ też jest miary zero.

(2) $\overline{K \cup L} = \overline{K} \cup \overline{L}$
$\mathrm{Int}(K \cup L) \supset (\mathrm{Int} K \cup \mathrm{Int} L)$

$\partial(K \cup L) = \overline{K \cup L} \setminus \mathrm{Int}(K \cup L) = (\overline{K} \cup \overline{L}) \setminus \mathrm{Int}(K \cup L) \subset (\overline{K} \cup \overline{L}) \setminus (\mathrm{Int} K \cup \mathrm{Int} L)$
$= \left[\overline{K} \setminus (\mathrm{Int} K \cup \mathrm{Int} L)\right] \cup \left[\overline{L} \setminus (\mathrm{Int} K \cup \mathrm{Int} L)\right] \subset \partial K \cup \partial L$ czyli jeśli ∂K i ∂L miary zero to $\partial(K \cup L)$ też miary 0.

Możemy teraz policzyć miary:



$$\chi_K+\chi_L = \chi_{K\cup L}+\chi_{K\cap L}$$

$$m(K\cup L)=\int_D (\chi_K+\chi_L)-\chi_{K\cap L} \underset{K\cap L=\emptyset}{=} \int_D\chi_K+\int_D\chi_L = m(K)+m(D)$$

rozłączne

$$K=(K\setminus L)\cup(K\cap L) \qquad m(K)=m(K\setminus L)+m(K\cap L)$$

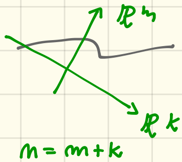
$$\Downarrow$$

$$m(K\setminus L)=m(K)-m(K\cap L) \qquad \blacksquare$$

Zbiory po których my będziemy zazwyczaj całkować to takie, których brzeg jest kawałkami powierzchnią mniejszego wymiaru. Takie zbiory są J-mierzalne. Mamy tw.

FAKT: Zbiór, którego brzeg jest lokalnie wykresem ciągłego odwzorowania jest J-mierzalny.

DOWÓD: Wystarczy pokazać, że obraz odwzorowania $F:\mathbb{R}^k\longrightarrow\mathbb{R}^m$ $k<m$ ciągłego jest miary zero. Weźmy $D_k\subset\mathbb{R}^k$ kostka domknięta a więc zwarta. $F|_{D_k}$ jest jednostajnie ciągła, zatem



$$\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0: \ F(D_k(x,\delta))\subset D_m(F(x),\varepsilon)$$

$$D_k(x,\delta)=[x_1-\delta,x_1+\delta]\times\cdots\times[x_k-\delta,x_k+\delta]$$

Wykres $F|_{D_k(x,\delta)}$ jest zawarty w $\underbrace{D_k(x,\delta)}_{(2\delta)^k}\times\underbrace{D_m(F(x),\varepsilon)}_{(2\varepsilon)^m}$. D_k można podzielić na kawałki miary δ^k i wtedy cały wykres jest zawarty w zbiorze o mierze mniejszej niż $m(D_k)\cdot(2\varepsilon)^m$ zatem biorąc małe ε...

WŁASNOŚCI $\int_K f$ – w większości oczywiste – nie dowodzimy

M, K, L – J-mierzalne

$f \in \mathcal{R}(K)$

(1) $f \in \mathcal{R}(K)$ i $L \subset K$ to $f \in \mathcal{R}(L)$

(2) $m(K) = 0 \Rightarrow \int_f A = 0$

(3) $K = L \cup M$ i $\mathrm{Int}\, L \cap \mathrm{Int}\, K = \emptyset$

$$\int_K f = \int_L f + \int_M L$$

(4) Całka $\int_K f$ jest liniowa

(5) $f, g \in \mathcal{R}(K) \Rightarrow f \cdot g \in \mathcal{R}(K)$

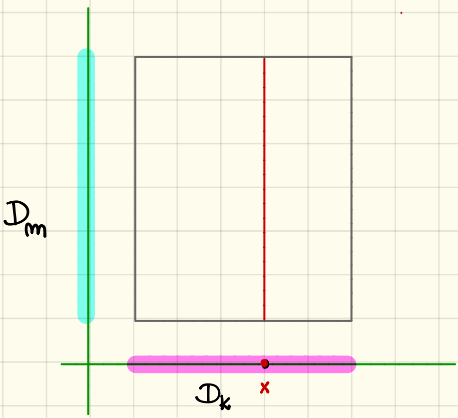
(6) $|f| \in \mathcal{R}(K)$ $\quad \left| \int_K f \right| \leq \int_K |f|$

(7) Tw o wartości średniej $\quad g \geq 0 \quad \int_K f \cdot g = \mu \int_K g$ dla pewnego $\inf_K f \leq \mu \leq \sup_K f$

(7a) Jeśli f ciągła i K spójny to $\exists\, \xi \in K$ taki że $\mu = f(\xi)$

MOŻEMY TERAZ W KOŃCU PRZEJŚĆ DO PRAKTYCZNYCH RACHUNKÓW:

Weźmy $n = k + m$ $\quad D_k, D_m$ kostki w $\mathbb{R}^k$ i $\mathbb{R}^m$ odpowiednio. $D = D_k \times D_m$ kostka w $\mathbb{R}^n$, $f \in \mathcal{R}(D)$



Dla $x \in D_k$ definiujemy

$$d(x) = \underline{\int}_{D_m} f(x, \cdot) \qquad g(x) = \overline{\int}_{D_m} f(x, \cdot)$$

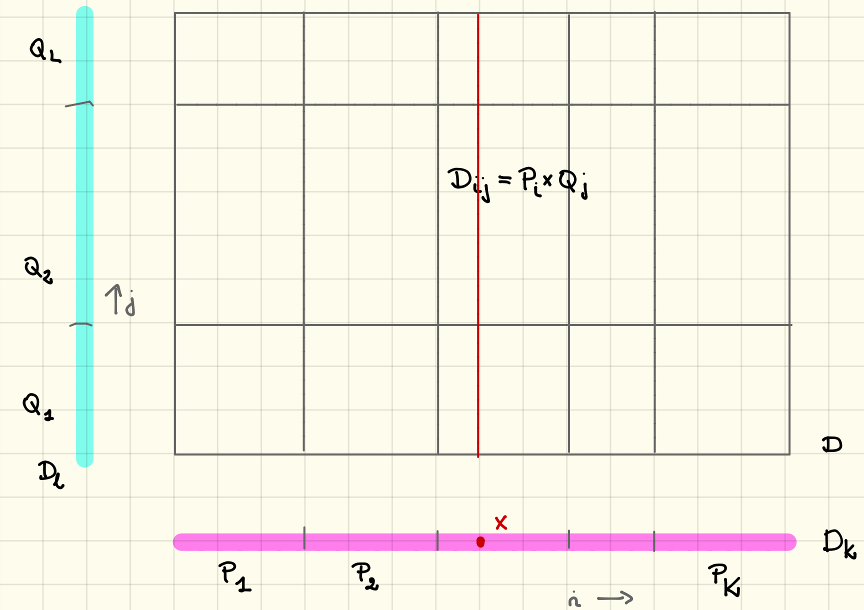
dolna $\qquad$ górna

TWIERDZENIE FUBINIEGO:

$d, g \in \mathcal{R}(D_k)$ oraz $\int_D f = \int_{D_k} d = \int_{D_k} g$

Uwaga – problem polega na tym, że $f \in R(D)$ nie pociąga za sobą tego że $f(x,\cdot) \in R(D_m)$. Stąd potrzeba rozważania całek górnych i dolnych.

DOWÓD



$$f_{ij} = \inf_{D_{ij}} f \qquad F_{ij} = \sup_{D_{ij}} f \qquad \underline{S}(\pi, f) = \sum_{i,j} f_{ij}\, m(D_{ij}) = \sum_{ij} f_{ij}\, m(P_i) m(Q_j)$$

$$\overline{S}(\pi, f) = \sum_{ij} F_{ij}\, m(P_i) m(Q_j) \qquad f_j(x) = \inf_{Q_j} f(x,\cdot) \qquad F_j(x) = \sup_{Q_j} f(x,\cdot)$$

$$\underline{S}(\pi, f) = \sum_i \Big(\sum_j f_{ij}\, m(Q_j) \Big) m(P_i) \leq \sum_i \underbrace{\Big(\sum_j f_j(x_i)\, m(Q_j) \Big)}_{\underline{S}(\pi_l,\, f(x_i, \cdot))} m(P_i) \leq \sum_i d(x_k) m(P_i$$

$f_j(x_i)$ $\quad x_i \in P_i$

$$= S(\pi_k, (x_i), d)$$

$\uparrow$ sume wypunktowane

6

To samo dla $\overline{S}$

$$\overline{S}(\Pi, f) = \sum_i \Big(\sum_j F_{ij}\, m(Q_j) \Big) m(P_i) \geq \sum_i \underbrace{\Big(\sum_j F_j(x_i)\, m(Q_j) \Big)}_{\overline{S}(\Pi_\ell,\, f(x_i, \cdot))} m(P_i) \geq \sum_i g(x_k) m(P_i)$$

$F(x_i)$ $\quad x_i \in P_i$

$$= S(\Pi_k, (x_i), g)$$

suma wypunktowana

Mamy: $\underline{S}(\Pi, f) \leq S(\Pi_k, (x_i), d)$ $\qquad S(\Pi_k(x_i), g) \leq \overline{S}(\Pi, f)$

ale $\forall x \; d(x) \leq g(x)$

Zatem $\underline{S}(\Pi, f) \leq S(\Pi_k, (x_i), d) \leq S(\Pi_k, (x_i), g) \leq \overline{S}(\Pi, f)$ $\quad (*)$

dowolnie bliskie

Mamy więc z faktu, że

$\underline{S}(\Pi, f) \leq S(\Pi_k, (x_i), d) \leq \overline{S}(\Pi, f)$ wynika całkowalność d

z faktu, że

$\overline{S}(\Pi, f) \leq S(\Pi_k, (x_i), g) \leq \overline{S}(\Pi, f)$ wynika całkowalność g

I ostatecznie z $(*)$ $\displaystyle\int_{D_\ell} d = \int_{D_\ell} g = \int_D f.$ ■

W twierdzeniu Fubiniego istotne jest założenie o całkowalności f.