WYKŁAD 23 i 24

ZAMIANA ZMIENNYCH W CAŁCE RIEMANNA

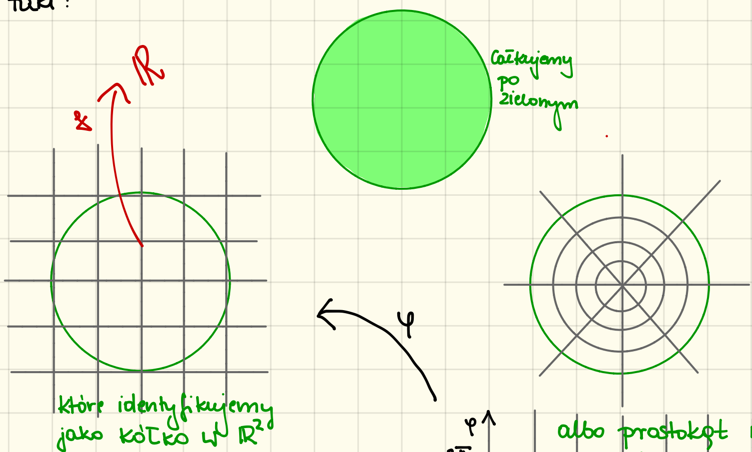
31 maja 2016.

TWIERDZENIE O ZAMIANIE ZMIENNYCH W CAŁCE RIEMANNA NA $\mathbb{R}^n$

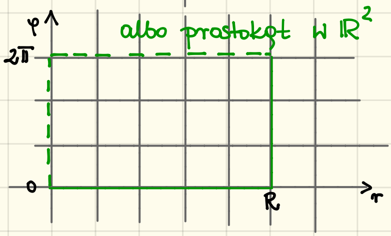
Niech $\mathcal{U}, \mathcal{O}$ będą otwarte w $\mathbb{R}^n$, $\varphi : \mathcal{U} \to \mathcal{O}$ dyfeomorfizm klasy C^1. Niech także $K \subset \overline{K} \subset \mathcal{U}$ oraz $\varphi(K) \subset \mathcal{O}$ będą J-mierzalne. Wtedy jeśli f jest całkowalne na $\varphi(K)$ to f jest całkowalne na K, a ponadto

$$\int_{\varphi(K)} f = \int_K f\circ\varphi \, |\det \varphi'|$$

Zauważmy, że wartości funkcji f się nie zmieniają, zmienia się tak naprawdę obszar po którym całkujemy. W fizyce patrzymy na to zazwyczaj jeszcze inaczej – w twierdzeniu o zamianie zmiennych w istocie zmienia się sposób w jaki identyfikujemy obszar całkowania z pewnym podzbiorem $\mathbb{R}^n$. Zmieniamy więc współrzędne a nie obszar całkowania. Jest to punkt widzenia jaki przybliża nas nieco do zagadnień związanych z geometrią różniczkową. Może więc właściwy rysunek jest raczej taki:



Ta identyfikacja jest w jakimś sensie ważniejsza, bo stąd bierzemy sposób wyznaczania objętości kostek.



Plan dowodu jest następujący (1) zajmiemy się zmianą miary kostek pod działaniem odwzorowań liniowych. (2) jak zmienia się miara zbiorów J-mierzalnych pod działaniem odwzorowań liniowych (3) różnica między działaniem φ a działaniem $\varphi'(x)$ jest nieduża, jeśli tylko kostka o którą chodzi też jest nieduża (4) podsumowanie i zakończenie dowodu.

(1) **Lemat 1:** Jeśli $T:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ jest liniowe a D jest kostką to $m(T(D)) = m(D)|\det T|$.

Dowód: Zauważmy że odwzorowanie liniowe T takie, że $\det T \neq 0$ można zapisać jako złożenie następujących odwzorowań:

$$I_\sigma \begin{bmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x^{\sigma(1)} \\ \vdots \\ x^{\sigma(n)} \end{bmatrix}$$

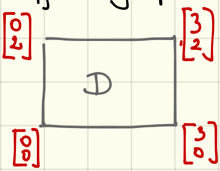
– permutacja współrzędnych $I_\sigma(D)$ jest kostką o tej samej objętości co D, $\det I_\sigma = \operatorname{sgn}\sigma$ $|\det I_\sigma| = 1$. Wzór zachodzi.

$$J_i(t) \begin{bmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x^1 \\ \vdots \\ t x^i \\ \vdots \\ x^n \end{bmatrix}$$

– $J_i(t)(D)$ też jest kostką o i-tej krawędzi dłuższej t-razy, objętość kostki zmienia się t-razy $m(J_i(t)(D)) = t\,m(D)$

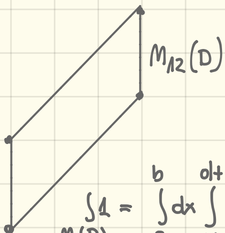
$$M_{ij}^{\pm} \begin{bmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^i \\ \vdots \\ x^j \pm x^i \\ \vdots \\ x^n \end{bmatrix}$$

– wystarczy sprawdzić w dwóch wymiarach:



$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \end{bmatrix}$$



$D = [a,b] \times [c,d] = \{(x,y): a \le x \le b, c \le y \le d\}$

$\det M_{12} = 1$

$M_{12}(D) = \{(x,y): a \le x \le b, c+x \le y \le d+x\}$

$m(D) = m(M_{12}(D))$

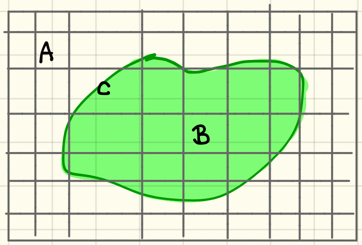
$$\int_{M(D)} 1 = \int_a^b dx \int_{c+x}^{d+x} dy = \int_a^b \big(d+x-(c+x)\big)dx = \int_a^b (d-c)\,dx = (d-c)(b-a) = m(D)$$

I_σ, $J_i(t)$, M_{ij} to są operacje elementarne. Każdą macierz można sprowadzić do 1 za pomocą operacji elementarnych. Każde T jest więc złożeniem elementarnych. Wyznacznik złożenia jest iloczynem wyznaczników. Dla operacji elementarnych wzór zachodzi. ■

(2)

Lemat 2 Niech K będzie J-mierzalny. Wówczas $m(T(K)) = m(K)|\det T|$

DOWÓD Przy dowodzie tego faktu przydatne będzie inne spojrzenie na mierzalność i miarę zbioru. 3



Weźmy podział Π kostki D zawierającej K. Kostki podziału dzielą się na trzy kategorie

A : $A \cap D = \emptyset$

B : $\operatorname{int} B \subset D$ $\quad B_i \quad i = 1 \dots k$

C : reszta $\quad C_j \quad j = 1 \dots l$

$$K \subset \bigcup_i B_i \cup \bigcup_j C_j \qquad \bigcup_i B_i \subset K \qquad \sum_j m(B_j) \leqslant m(K) \leqslant \sum_i m(B_i) + \sum_j m(C_j)$$

Biorąc drobniejszy podział to zwiększamy

to zmniejszamy

Jeśli K jest J mierzalny możemy znaleźć taki podział, żeby $\sum_j m(C_j) < \varepsilon$ dla dowolnego ε. Wiąże się to z faktem że $\bigcup_j C_j \supset \partial K$ a ∂K jest miary 0. Nie będziemy tego dokładnie dowodzić uznając że jest intuicyjne jasne.

$$T \Big/ \quad \bigcup_i B_i \subset K \subset \bigcup_i B_i + \bigcup_j C_j$$

$$\bigcup_i T(B_i) \subset T(K) \subset \bigcup_i T(B_i) + \bigcup_j T(C_j)$$

$$\sum_i m(T(B_i)) \leqslant m(T(K)) \leqslant \sum_i m(T(B_i)) + \sum_j m(T(C_j))$$

$$|\det T| \sum_i m(B_i) \leqslant m(T(K)) \leqslant |\det T| \left(\sum_i m(B_i) + \sum_j m(C_j) \right) \quad \Big/ : |\det T|$$

$$\sum_i m(B_i) \leqslant \frac{m(T(K))}{|\det T|} \leqslant \sum_i m(B_i) + \sum_j m(C_j)$$

$$\left| \frac{1}{|\det T|} m(T(K)) - m(K) \right| < \varepsilon \quad - \text{ z dowolności } \varepsilon \longrightarrow \text{ równe. } \blacksquare$$

(3) Kolejny krok to pokazanie, że na wystarczająco małej kostce działanie φ nie bardzo różni się od działania $\varphi'(x)$. Zauważmy najpierw, że jeśli K jest mierzalny i φ jest dyfeomorfizmem to $\varphi(K)$ także jest mierzalny, $\varphi(\partial K) = \partial(\varphi(K))$ oraz obrazem zbioru miary 0 jest zbiór miary 0. (Dowód zostawiam jako ćwiczenie) 4

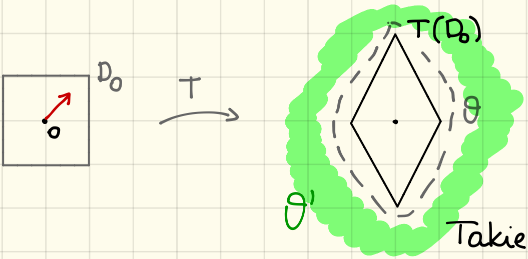
Lemat (3) Niech D będzie kostką o środku w x i krawędzi ℓ, tzn $D = [x^1 - \ell/2, x^1 + \ell/2] \times \dots \times [x^n - \ell/2, x^n + \ell/2]$, φ - dyfeomorfizm określony na zbiorze zawierającym D, $T = \varphi'(x)$

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta : \ \ell < \delta \implies (1-\varepsilon)\, m(T(D)) \leq m(\varphi(D)) \leq (1+\varepsilon)\, m(T(D))$$

(czyli miara $\varphi(D)$ niewiele różni się od $m(\varphi'(x)(D))$)

Dowód: Zauważmy, że zawsze można sprowadzić problem do $x=0$, $\varphi(0)=0$ odpowiednio przesuwając zbiory i modyfikując φ o przesunięcie. Nie wpływa to na miarę. Dowodzimy $\leq$

D_0 - kostka o środku 0 i krawędzi 1. $D = \ell D_0$



θ otwarty, J-mierzalny i taki, że $T(D_0) \subset \theta$

$$m(\theta) \leq (1+\varepsilon)\, m(T(D_0))$$

Takie θ da się wybrać, bo TD_0 jest mierzalny więc można go dowolnie przybliżyć od góry np sumą otwartych kostek.

$$\text{dla } \ell > 0 \text{ mamy} \quad m(\ell\theta) \leq (1+\varepsilon)\, m(T(\ell D_0))$$

Pokażemy, że istnieje taka kostka ℓD_0 dla wystarczająco małego ℓ, że nie tylko $T(\ell D_0) \subset \ell\theta$ ale także $\varphi(\ell D_0) \subset \ell\theta$.

Istotnie zauważmy przede wszystkim że skoro TD_0 domknięty i $TD_0 \subset \Theta$ to $d(T(D_0), \Theta') = \rho > 0$ $\quad d(T(\ell D_0), (\ell\Theta)') = \rho\ell$

$$\varphi(h) = \underset{\overset{\shortparallel}{0}}{\varphi(0)} + \underset{\overset{\shortparallel}{T}}{\varphi'(0)}h + r(0,h) \qquad h \in D_0$$

$t > 0$

z własności reszty

$$\varphi(\ell h) = T(\ell h) + r(0,\ell h) \qquad \|\varphi(\ell h) - T(\ell h)\| = \|r(0,\ell h)\| \qquad \lim_{t\to 0} \frac{\|r(0,\ell h)\|}{\|\ell h\|} \to 0$$

zatem istnieje $\delta > 0$ taka że $\forall \ell < \delta$ $\quad \|r(0,\ell h)\| < \rho \cdot \|\ell h\| < \rho \cdot \ell$

zatem dla $\ell < \delta$

$$\|\underset{\varphi(\ell D_0)}{\underset{\cap}{\varphi(\ell h)}} - \overset{T(\ell D_0)}{\overset{\in}{T(\ell h)}}\| < \rho\ell \implies$$

Każdy punkt $\varphi(\ell D_0)$ jest odległy od $T(\ell D_0)$ o mniej niż $\rho\ell$ tzn nie może należeć do $(\ell\Theta)'$ zatem należy do $\ell\Theta$

$\varphi(\ell D_0) \subset \ell\Theta$

$$m(\varphi(\ell D_0)) \leqslant m(\ell\Theta) < (1+\varepsilon)\, m(T(\ell D_0))$$

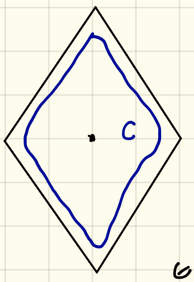
$$D = \ell D_0$$

Dowodzimy $\geqslant$ Zamiast przybliżać $T(D_0)$ z góry zbiorem Θ przybliżamy z dołu zbiorem zwartym i wypukłym C takim, że $C \subset \operatorname{int} T(D_0)$

i takim, że $m(T(D_0)) \leqslant (1+\varepsilon)\, m(C)$

nierówność się skaluje

$$m(T(\ell D_0)) \leqslant (1+\varepsilon)\, m(\ell C)$$

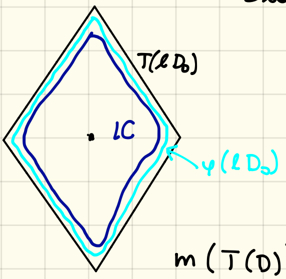


Tym razem $d(C, T(D_0)') = \rho' > 0 \quad d(\ell C, T(\ell D_0)') = \ell\rho'$

Bierzemy ℓ takie, że

$$\|\underset{\varphi(\ell D_0)}{\underset{\cap}{\varphi(\ell h)}} - \overset{T(\ell D_0)}{\overset{\in}{T(\ell h)}}\| < \rho\ell$$

Brzeg $\partial\varphi(\ell D_0)$ oddalony jest od $\partial T(\ell D_0)$ o mniej niż $\ell\delta'$
ℓC oddalony jest od $\partial T(\ell D_0)$ o więcej niż $\ell\delta'$ tzn (+ wypukłość ℓC i fakt, że $\ell C \cap \varphi(\ell D_0) \neq \emptyset$) $\ell C \subset \varphi(\ell D_0)$



Dla $\ell<\delta'$ $\quad m(\ell C) \leq m(\varphi(\ell D_0)) \leq m(T(\ell D_0)) \leq$

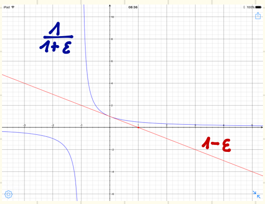
$$\leq (1+\varepsilon)\, m(\ell C)$$

$$m(\ell C) \leq m(\varphi(D)) \leq \underline{m(T(D))} \leq (1+\varepsilon) m(\ell C) \leq$$
$$\leq \underline{(1+\varepsilon)\, m(\varphi(D))}$$

$$m(T(D)) \leq (1+\varepsilon)\, m(\varphi(D))$$

$$(1-\varepsilon)\, m(T(D)) \leq \frac{1}{1+\varepsilon}\, m(T(D)) \leq m\,\varphi(D)$$

■



(4) Przechodzimy do zakończenia dowodu. Użyjemy sum wypunktowanych

$$\int_{\varphi(K)} f = \int_K f\circ\varphi\, |\det \varphi'|$$

Niech $K \subset E$ kostka. Bierzemy podział π kostki E taki żeby średnice kostek E_i były mniejsze niż δ. x_i – środek E_i

Wobec jednostajnej ciągłości φ na E średnice $\varphi(E_i) < M\delta$ dla pewnego M
z lematu (3) mamy

$$(1-\varepsilon)\, m(\varphi(E_i)) \leq \underset{\substack{\| \\ |\det\varphi'(x_i)|\, m(E_i)}}{m(\varphi'(x_i)(E_i))} \leq (1+\varepsilon)\, m(\varphi(E_i))$$

Piszemy sumy wypunktowane dla obu całek

$$\int_K f\circ\varphi\,|\det\varphi'| \longrightarrow \sum_i f\circ\varphi(x_i)|\det\varphi'(x_i)|m(E_i)$$

$$\int_{\varphi(K)} f \longrightarrow \sum_i f(\varphi(x_i))\,m(\varphi(E_i))$$

↑ formalnie to nie jest suma wypunktowana względem podziału na kostki, bo $\varphi(E_i)$ nie jest kostką. Jednak jest to podział $\varphi(K)$ na małe części o znanych powierzchniach – można go użyć.

Jeśli ktoś lubi być bardzo dokładny niech zastąpi ten podział podziałem o średnicy mniejszej niż $M\delta$.

$$\left|\sum_i f\circ\varphi(x_i)|\det\varphi'(x_i)|m(E_i) - \sum_i f(\varphi(x_i))m(\varphi(E_i))\right| \leq$$

$$\sup_{x\in K}|f| \sum_i \Big|\underbrace{\det(\varphi'(x_i))m(E_i) - m(\varphi(E_i))}_{\leq\ \varepsilon\, m(\varphi(E_i))}\Big| \leq \sup_K|f|\,\varepsilon\underbrace{\sum_i m(\varphi(E_i))}_{m(\varphi(K))} =$$

$$= \sup_K|f|\,m(\varphi(E))\cdot\varepsilon$$

↑ może być dowolnie małe

Nierówność pokazuje jednocześnie całkowalność $f\circ\varphi$ na K oraz równość całek.

KONIEC DOWODU