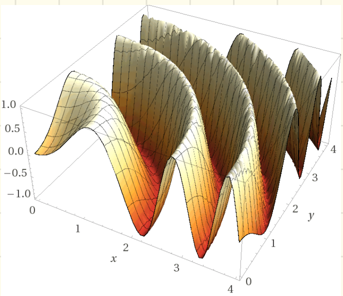
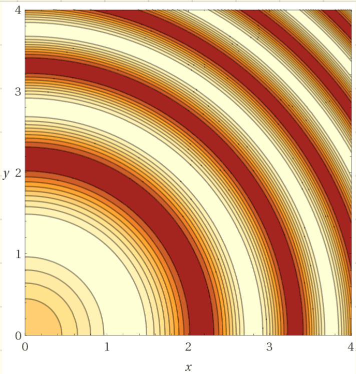
NIEWŁAŚCIWA CAŁKA RIEMANNA

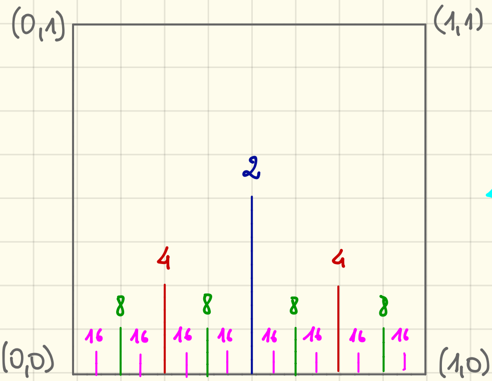
Pojęcie niewłaściwa całka Riemanna dotyczy sytuacji kiedy obszar całkowania jest nieograniczony lub kiedy obszar całkowania jest ograniczony ale funkcja jest nieograniczona. Nadal jednak mówimy o obszarach których brzeg jest zbiorem miary zero. W zastosowaniach brzeg jest zazwyczaj lokalnie wykresem odwzorowania ciągłego. Rozważmy dwa przykłady:

$A = [0,\infty[\times [0,\infty[\subset \mathbb{R}^2$ $\quad f: A \longrightarrow \mathbb{R}$ $\quad f(x,y) = \sin(x^2+y^2)$

$B =]0,1[\times]0,1[$ $\quad g: B \to \mathbb{R}$ $\quad g\left(\frac{2l+1}{2^n}, y\right) = 2^n$ w pozostałych przypadkach $f(x,y)=0$







Całkę niewłaściwą po A definiujemy podobnie do przypadku jednowymiarowego z jedną istotną różnicą:

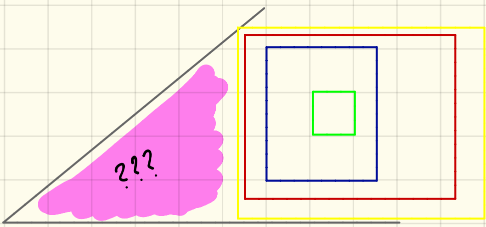
Niech K będzie zbiorem mierzalnym, zwartym, zawartym w A. Mówimy, że f jest **lokalnie całkowalna na A** jeśli jest całkowalna (w szczególności ograniczona) na każdym takim $K \subset A$.
Rodzina wszystkich J-mierzalnych, zwartych podzbiorów A jest wyposażona w relację skierowania, tzn K_2 jest późniejszy niż K_1 jeśli $K_1 \subset K_2$

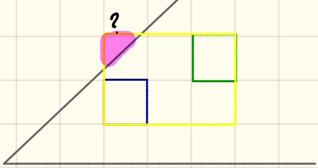
Dla lokalnie całkowalnej funkcji f definiujemy ciąg uogólniony

$$K \longmapsto \int_K f$$

Jeśli granica powyższego ciągu istnieje to jej wartość nazywamy **całką z f po zbiorze A** i oznaczamy $\int_A f$

I gdzie tu ta różnica w definicji w stosunku do $\mathbb{R}^1$? W tym, że na $\mathbb{R}^1$ definiowaliśmy całkę po odcinku niezwartym I a jako zbiory K numerujące ciąg uogólniony rozważaliśmy jedynie odcinki zwarte a nie np skończone sumy odcinków zwartych.
Odpowiednikiem odcinków w $\mathbb{R}^n$ są kostki. Problem w tym, że wielu mierzalnych zbiorów po których chcielibyśmy całkować nie da się „wypełnić" powiększającymi się kostkami. Nie jest też prawdą, że dla każdych dwóch kostek $D_1, D_2 \subset A$ istnieje kostka $D_3 \subset A$ taka że $D_1 \subset D_3$ i $D_2 \subset D_3$





Co się da dla odcinków nie da się dla kostek stąd różnica. Podstawową konsekwencją tej różnicy jest nieistnienie pojęcia zbieżności warunkowej dla całek po obszarach w $\mathbb{R}^n$. $n>1$. Dokładniej:

(1) Jeśli f jest funkcją nieujemną wystarczy wybrać dowolny zwykły ciąg zbiorów $K_n \subset A$ takich, że $K_i \subset K_{i+1}$ oraz $\bigcup_{i\in\mathbb{N}} K_i = A$. Wtedy $\int_A f$ istnieje wtedy i tylko wtedy gdy istnieje

$\lim_{n\to\infty} \int_{K_n} f$. Istotnie: dla nieujemnej funkcji ciąg $K \longmapsto \int_K f$ jest niemalejący. Do zbieżności wystarczy więc pokazać że jest ograniczony. Istnienie granicy $\lim_{n\to\infty} \int_{K_n} f$ oznacza, że ograniczony jest podciąg numerowany przez K_n. Ograniczeniem jest oczywiście granica tego podciągu. Weźmy teraz dowolny zbiór $K \subset A$, zwarty, J-mierzalny. Istnieje $m \in \mathbb{N}$ takie że K_m jest późniejszy niż K. Kluczowa jest zwartość K. Wobec tego

$$\int_K f \leq \int_{K_m} f \leq \int_A f.$$

(3) Dwa przykłady problemów z tw. Fubiniego

Czy istnieje $\int_A f$? $\quad K_R = \{(x,y) : x \geq 0,\ y \geq 0,\ x^2+y^2 \leq R^2\}$

$$\int_{K_R} f = \int_{K_R} \sin^2(x^2+y^2)\,dx\,dy = \int_{[0,\frac{\pi}{2}]\times[0,R]} \sin r^2\, r\,dr\,d\varphi = \frac{\pi}{2}\int_0^R \sin r^2\, r\,dr = \frac{\pi}{2}\left(-\frac{1}{2}\cos r^2\right)\Big|_0^R =$$

$= \frac{\pi}{2}\left(-\frac{1}{2}\cos R^2 + \frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{4}\left(1-\cos R^2\right)$ nie ma granicy dla $R \to \infty$. Znaleźliśmy podciąg ciągu $K \longrightarrow \int_K f$ $\left(K_R \longrightarrow \int_{K_R} f\right)$ niezbieżny zatem całka $\int_A f$ nie istnieje

Istnieją za to całki iterowane:

całki Fresnela, obie istnieją

$$\int_0^\infty dx \int_0^\infty dy\, \sin(x^2+y^2) = \int_0^\infty dx \int_0^\infty dy \left(\sin x^2 \cos y^2 + \cos x^2 \sin y^2\right) = 2\int_0^\infty \cos x^2\,dx \int_0^\infty \sin x^2\,dx$$

e^{-kt}

$$\int_0^\infty \sin x^2\,dx = \int_0^\infty \frac{\sin t}{\sqrt{t}}\,dt \qquad F(k) = \int_0^\infty \frac{\sin t}{\sqrt{t}}\,e^{-kt}\,dt$$

$$\frac{1}{\sqrt{t}} = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty e^{-ty^2}\,dt \qquad \int_0^\infty \left(\sin t\, e^{-kt} \int_0^\infty \frac{2}{\pi} e^{-ty^2}\,dy\right)dx \overset{?}{=} \frac{2}{\pi}\int_A \sin t\; e^{-kt-y^2t}\,dy\,dt =$$

można bo istnieje całka z modułu

$$= \frac{2}{\pi}\int_0^\infty dy \int_0^\infty dt\, \sin t\; e^{-t(k+y^2)} = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty dy\, \frac{1}{1+(k+y^2)^2} \underset{\lim_{k\to 0}}{=} \frac{2}{\pi}\,\frac{\pi}{2\sqrt{2}} = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

można przejść do granicy pod znakiem całki bo dla $k \in [0,1]$ $f(k,y) \leq \frac{1}{1+y^4}$ całkowalne.

Obie iterowane istnieją ale nie istnieje całka po A.

$\int_B g$ istnieje: g dodatnia, $B_\varepsilon = [\varepsilon, 1-\varepsilon] \times [\varepsilon, 1-\varepsilon]$ $\int_{B_\varepsilon} g = 0$ bo g jest 0 poza zbiorem miary zero. Zatem $\int_B g = 0$. Inaczej dla całek iterowanych:

$$\int_0^1 dy \int_0^1 dx\, f(x,y) = \int_0^1 0\, dy = 0$$

dla ustalonego $y>0$ $f \neq 0$ jedynie w skończonej liczbie punktów

$$\int_0^1 dx \int_0^1 dy\, f(x,y) = ?$$ $$\int_0^1 f\left(\frac{2l+1}{2^n}, y\right) dy = \int_0^{1/2^n} 2^n\, dy = 1$$ dla pozostałych $x = 0$.

$x \longmapsto \int_0^1 dy\, f(x,y)$ nie jest całkowalne w sensie Riemanna.