SZEREGI POTĘGOWE

Szereg potęgowy jest szczególnym przykładem szeregu funkcyjnego. Wyraz ogólny szeregu jest postaci $x \mapsto c_n x^n$ gdzie c_n jest n-tym wyrazem ciągu liczbowego. Szeregi potęgowe rozważa się często od razu w dziedzinie zespolonej ze względu na relatywnie niewielkie komplikacje jakie takie uogólnienie powoduje. W takim przypadku dopuszcza się $c_n \in \mathbb{C}$ i pisze $\sum c_n z^n$ raczej niż $\sum c_n x^n$ żeby podkreślić zespoloną dziedzinę. My jednak będziemy wypowiadać się na temat różniczkowanie funkcji zadanych przez zbieżne szeregi potęgowe a różniczkowanie w dziedzinie zespolonej wymaga wyjaśnień. Ogólnie rzecz biorąc będziemy więc trzymać się przypadku rzeczywistego uzupełniając ewentualnie o zespolone komentarze.

Motywacje wykłady z Analizy i Algebry są często krytykowane za nadmiar abstrakcyjnych rozumowań. Tym razem w poszukiwaniu motywacji do walki z abstrakcjami zwrócimy się do fizyki. Rozważmy bęben z okrągłą membraną. Na przykład taki:

Ruch membrany możemy opisać funkcją $u: \mathbb{R}\times D \longrightarrow \mathbb{R}$ gdzie $D=\{(x,y)\in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \leq d^2\}$ a pierwsza zmienna reprezentuje czas $(t,x,y) \longmapsto u(t,x,y)$

Funkcja u spełnia dwuwymiarowe równanie falowe

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)$$ z warunkiem brzegowym

$u(t,x,y)=0$ jeśli $x^2+y^2=d^2$

Ponieważ membrana jest okrągła zamieniamy zmienne na biegunowe:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial^2 u}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2}\right)$$

Przeprowadzanie operacji zamiany zmiennych jest jednym z powodów dlaczego wkrótce uczyć się będziemy twierdzenia o lokalnej odwracalności i o funkcjach uwikłanych. (motywacja na przyszłość)

Poszukiwać będziemy rozwiązań w postaci

$$u(t,r,\varphi) = R(r)\,\Phi(\varphi)\,T(t)$$

Dalej przeprowadzamy mnóstwo nudnych rachunków. Na końcu dostajemy równanie na R:

$$r^2 R''(r) + rR'(r) + (\lambda^2 r^2 - m^2)R(r) = 0$$

λ ma coś wspólnego z częstotliwością drgań a $m \in \mathbb{R}$ powstaje z warunku, że Φ jest periodyczna.

Dla ułatwienia weźmy $\lambda=1$ pomijając jeszcze jedną zamianę zmiennych po drodze. Mamy więc

$$(*) \quad r^2 R''(r) + rR'(r) + (r^2 - m^2)R(r) = 0$$

To równanie różniczkowe zwyczajne rzędu 2 jest na tyle ważne, że ma nazwę: **równanie Bessel'a**. Takie równanie pojawia się w wielu fizycznych kontekstach. Problemem jest, że raczej nie wiemy jak je rozwiązać. W takiej sytuacji możemy poszukać rozwiązań w postaci szeregu potęgowego: $R(r) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n r^n$. Spróbujmy znaleźć $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ takie, że R spełnia równanie $(*)$

Zrobimy teraz trochę rachunków wstawiając ! w miejscach, które wymagają wyjaśnienie.

$$r^2 R''(r) + r R'(r) + (r^2 - m^2) R(r) = 0 \qquad R(r) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n r^n$$

$$R'(r) \overset{!}{=} \sum_{n=0}^{\infty} n c_n r^{n-1} \qquad R''(r) \overset{!}{=} \sum_{n=0}^{\infty} m(m-1) c_m r^{n-2}$$

$$r \sum_{n=0}^{\infty} n c_n r^{n-1} + r^2 \sum_{n=0}^{\infty} m(m-1) c_m r^{n-2} + r^2 \sum_{n=0}^{\infty} c_n r^n - m^2 \sum_{n=0}^{\infty} c_n r^n = 0$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left[n(n-1) c_n + n c_n - m^2 c_n \right] r^n + \sum_{n=2}^{\infty} c_{m-2} r^n = 0$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n^2 - m^2) c_n r^n + \sum_{n=2}^{\infty} c_{n-2} r^n = 0$$

$$-m^2 c_0 + (1-m^2) c_1 r + \sum_{n=2}^{\infty} \left[(n^2-m^2) c_n + c_{n-2} \right] r^n = 0$$

$c_0 = 0$, $\quad c_1 = 0$ lub dla $m = 1$ $\quad c_1$ dowolne

$$c_n (n^2 - m^2) + c_{m-2} = 0$$

Powstający szereg zależy od m. Widać że współczynniki $c_n(m)$ są 0 dla $n < m$ i $c_m(m)$ jest dowolny. Dalej $c_{m+1}(m) = \dots = c_{m+1+2k}(m) = 0$ zaś $c_{m+2k}(m)$ można wyznaczyć w zależności od $c_m(m)$

$$c_{m+2}\left((m+2)^2 - m^2\right) = -c_m \Rightarrow c_{m+2} = \frac{-1}{(m+2)^2 - m^2} c_m = \frac{-1}{2(2m+2)} c_m = \frac{-1}{4(m+1)} c_m$$

$$c_{m+4}\left((m+4)^2 - m^2\right) = -c_{m+2} \Rightarrow c_{m+4} = \frac{-1}{(m+4)^2 - m^2} c_{m+2} = \frac{-1}{4(2m+4)} c_{m+2} = \frac{-1}{8(m+2)} c_{m+2}$$

$$\vdots$$

$$c_{m+2k}\left((m+2k)^2 - m^2\right) = -c_{m+2(k-1)} \Rightarrow c_{m+2k} = \frac{-1}{2k(2m+2k)} c_{m+2k-2} = \frac{-1}{4k(m+k)} c_{m+2k-2}$$

Skąd wnioskujemy, że

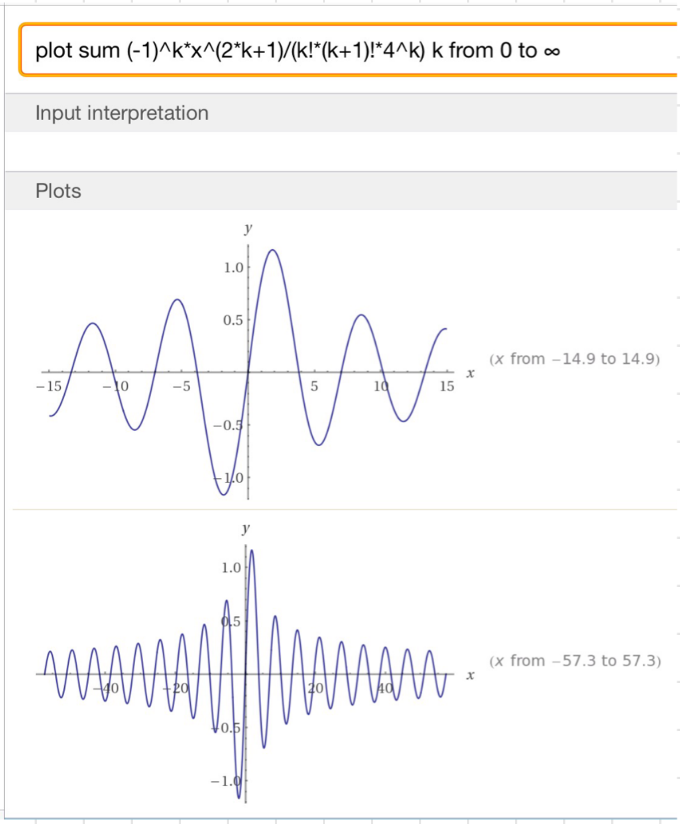
$$c_{m+2k} = \frac{(-1)^k m!}{4^k k! (m+k)!} c_m$$

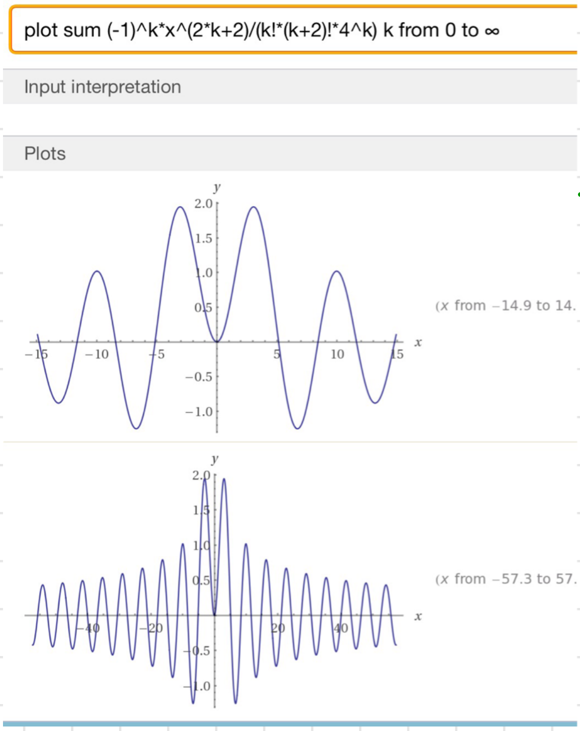
Rozwiązanie naszego równanie to

$$R_m(r) \overset{!}{=} m! c_m \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{4^k k! (m+k)!} r^{m+2k}$$

Czerwony wykrzyknik oznacza, że coś tu trzeba sprawdzić. Na przykład czy szereg jest zbieżny i dla jakiego r. Zanim zajmiemy się tym systematycznie zabawmy się w matematykę eksperymentalną przy użyciu WolframAlpha

$m = 1$, $c_1 = 1$





$m=2$
$c_2=1$

Matematyka eksperymentalna podpowiada że szereg definiujący R jest zbieżny. Zabierzmy się jednak do tego systematycznie. Dla ustalenia uwagi weźmy $m=1$ $c_1=1$. Dostajemy wtedy: **3**

$$\sum \underbrace{\frac{(-1)^k r^{2k+1}}{4^k\, k!\,(k+1)!}}_{u_k}$$

Ten szereg jest naprzemienny, zbieżność warunkową sprawdzimy więc badając czy $|u_k|$ monotonicznie dąży do zera. Weźmy

(*) $$\frac{|u_{k+1}|}{|u_k|} = \frac{|r|^{2k+3}\, k!\,\cancel{(k+1)!}\, 4^k}{4^{k+1}\cancel{(k+1)!}\,(k+2)!\,|r|^{2k+1}} = \frac{r^2}{4(k+1)(k+2)} < 1 \quad \text{dla } k>r$$

Dla każdego r od pewnego miejsca $|u_k|$ monotoniczny. Dodatkowo, $\left|\frac{u_{k+1}}{u_k}\right| \xrightarrow[k\to\infty]{} 0$ więc szereg jest bezwzględnie zbieżny dla każdego r. To rozwiązuje kwestię istnienia funkcji R, przynajmniej dla $m=1$. Pozostaje pytanie czy operacje różniczkowania wyraz po wyrazie były uzasadnione. Nie będziemy jednak tego badać specyficznie dla przykładu z funkcją R. Pora pomyśleć ogólnie o szeregach potęgowych.

Niech więc c_n będzie ciągiem rzeczywistym i $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ szeregiem potęgowym. Zajmijmy się najpierw zbieżnością punktową. W (*) użyliśmy kryterium d'Alemberta, wiadomo jednak, że kryterium Cauchy'ego jest subtelniejsze. Użyjmy go, pamiętając że stosuje się do szeregów dodatnich – badamy więc zbieżność bezwzględną:

$$\limsup \sqrt[n]{|c_n x^n|} = \limsup \sqrt[n]{|c_n|}\,|x| = |x| \underbrace{\limsup \sqrt[n]{|c_n|}}_{=\frac{1}{R}} = \frac{|x|}{R}$$

Gdy $\frac{|x|}{R} < 1$ i.e. $|x| < R$ szereg $\sum |c_n x^n|$ jest zbieżny, więc $\sum c_n x^n$ jest zbieżny bezwzględnie.

Gdy $\frac{|x|}{R} > 1$ i.e. $|x| > R$ szereg $\sum |c_n x^n|$ jest rozbieżny i to bardzo, bo z dowodu wynika, że nie spełnia warunku koniecznego. Oznacza to, że $\sum c_n x^n$ także nie spełnia warunku koniecznego, wobec tego jest rozbieżny.

Gdy $\frac{|x|}{R} = 1$, tj. dla $x = \pm R$ nie wiadomo. Powyższe rozważanie uzasadnia DEFINICJĘ: Liczbę R taką, że $\frac{1}{R} = \limsup \sqrt[n]{|c_n|}$ nazywamy promieniem zbieżności szeregu potęgowego. Jeśli $\limsup \sqrt[n]{|c_n|} = 0$ wtedy promień zbieżności jest nieskończony, tzn $\sum c_n x^n$ jest bezwzględnie zbieżny dla dowolnego x.

① ZADANIE DO PRACY SAMODZIELNEJ: Co jeśli $(c_n)_{n\in\mathbb{N}\cup\{0\}}$ jest ciągiem w $\mathbb{C}$ i rozważamy $\sum c_n z^n$ dla $z \in \mathbb{C}$? Czy pojęcie promienia zbieżności ma sens?

Dalej zajmujemy się zbieżnością jednostajną.

TWIERDZENIE: Szereg potęgowy $\sum c_n x^n$ jest zbieżny niemal jednostajnie na odcinku $]-R, R[$ gdzie R oznacza promień zbieżności szeregu.

DOWÓD: Weźmy dowolny zbiór zwarty $K \subset]-R,R[$. Zbiór ten zawarty jest w pewnym odcinku $[-\rho,\rho]$ dla $\rho<R$, $\rho>0$. Oznaczając $u_n(x)=c_n x^n$ mamy dla $x\in K$

$|u_n(x)| = |c_n| x^n \leqslant |c_n|\rho^n$ Szereg $\sum |c_n|\rho^n$ jest szeregiem liczbowym o wyrazach dodatnich, zbieżnym (bo $\rho<R$, tzn $\sqrt[n]{|c_n|}\rho<1$). Na mocy Kryterium Weierstrasse szereg $\sum c_n x^n$ jest jednostajnie zbieżny na K, a z dowolności K, niemal jednostajnie zbieżny na $]-R,R[$ ■

WNIOSKI:

(1) Z niemal jednostajnej zbieżności szeregu $\sum c_n x^n$ wynika, że $f(x)=\sum c_n x^n$ jest ciągła na $]-R,R[$.

(2) Szereg $\sum_{n=1}^{\infty} n c_n x^{n-1}$, tzn szereg pochodnych, jest także szeregiem potęgowym. Ma ponadto taki sam promień zbieżności jak wyjściowy szereg. Szereg pochodnych jest więc niemal jednostajnie zbieżny na $]-R,R[$. Na mocy stosownego stwierdzenia f jest różniczkowalna i $f'(x)=\sum n c_n x^{n-1}$

(3) Indukcyjnie z (2) wnioskujemy, że f jest klasy C^∞ na $]-R,R[$

(4) Funkcje zadane szeregiem potęgowym są ciągłe a zatem całkowalne w sensie Riemanna na $[a,b]\subset]-R,R[$. Jednostajna zbieżność daje możliwość całkowanie wyraz po wyrazie. Funkcje pierwotne więc istnieją i są zadane szeregami z tym samym promieniem zbieżności.

DEFINICJA Funkcje zadane zbieżnymi szeregami potęgowymi nazywają się analityczne.

WNIOSEK DLA FUNKCJI BESSEL'A: Funkcje Bessela dla różnych m są analityczne na $\mathbb{R}$.

TWIERDZENIE: Niech R będzie promieniem zbieżności szeregu $\sum c_n x^n$. Załóżmy, że szereg ten jest zbieżny dla $x=R$ $(x=-R)$. Wtedy funkcja $f(x)=\sum c_n x^n$ jest ciągła jednostronnie w $x=R$ $(x=-R)$

DOWÓD: W tym przypadku kryterium Weierstrasse nam nie pomoże, gdyż na brzegu obszaru zbieżności zbieżność może być jedynie warunkowa. Na przykład $\log(1+x)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n}x^n$ ma promień zbieżności $R=1$, wobec tego jest bezwzględnie i jednostajnie zbieżny dla $x\in]-1,1[$. W $x=1$ szereg także jest zbieżny, ale jedynie warunkowo.

Dla ułatwienie dowodu zamieńmy zmienną: $w=\frac{x}{R}$ tzn $x=Rw$ $\sum c_n x^n = \sum \underline{c_n R^n} w^n = \sum a_n w^n$. Szereg $\sum a_n w^n$ ma promień zbieżności 1. Załóżmy, że szereg jest zbieżny w $w=1$. a_n

$$S=\sum a_n \qquad S_m=\sum_{k=0}^{n} a_k \qquad S=\lim_{n\to\infty} S_n$$

$$\sum_{k=0}^{n} a_k w^k = \sum_{k=0}^{n}\underset{\substack{\uparrow\\ S_{-1}=0}}{(S_k-S_{k-1})}w^k = \sum_{k=0}^{n} S_k w^k - \sum_{k=0}^{n} S_{k-1}w^k = \sum_{k=0}^{n-1} S_k w^k + S_m w^n - \sum_{k=0}^{n-1} S_k w^{k+1} = (1-w)\sum_{k=0}^{n-1} S_k w^k + S_n w^n$$

$$x:\ 0\leqslant x<1:\quad f(w)=\lim_{n\to\infty}\sum^{n} a_k w^k = \lim_{n\to\infty}\left((1-w)\sum_{k=0}^{n-1} S_k w^k + \underset{\swarrow S}{S_m}\,\underset{\downarrow 0}{w^n}\right) = (1-w)\lim_{n\to\infty}\sum_{0}^{n-1} S_k w^k$$

$$|f(w)-S| = \left|(1-w)\sum^{\infty} S_k w^k - S\right| = \left|(1-w)\sum^{\infty} S_k w^k - (1-w)\sum_{0}^{\infty} S w^k\right| = (1-w)\left|\sum (S_k-S)w^k\right| \leqslant$$
$$(1-w)\sum^{N-1}(S_k-S)w^k + (1-w)\left|\sum_{N}^{\infty}(S_k-S)w^k\right|$$

$$|f(w)-S| = \left|(1-w)\sum_{0}^{\infty} S_k w^k - S\right| = \left|(1-w)\sum_{0}^{\infty} S_k w^k - (1-w)\sum_{0}^{\infty} S w^k\right| = (1-w)\left|\sum (S_k - S) w^k\right| \leq$$
$$(1-w)\sum_{0}^{N-1}(S_k-S)w^k + (1-w)\left|\sum_{N}^{\infty}(S_k-S)w^k\right|$$

Wiadomo, że $S_n \longrightarrow S$. Ustalmy $\varepsilon>0$ i weźmy N takie że dla $n \geq N$ $|S_n - S| < \varepsilon/2$

$$(1-w)\left|\sum_{N}^{\infty}(S_k-S)w^k\right| < (1-w)\frac{\varepsilon}{2}\sum_{N}^{\infty} w^k < (1-w)\varepsilon/_{2}\sum_{0}^{\infty} w^n = \varepsilon/2$$

$\sum_{k=0}^{N-1}(S_k-S)w^k$ jest wielomianem. Jest więc ograniczone na $[0,1]$. Weźmy M: $\sum_{k=0}^{N-1}|S_k-S|w^k < M$

Weźmy też W takie, że $(1-W) < \frac{\varepsilon}{2M}$ (tzn x bliskie 1) wtedy $(1-w)\left|\sum_{k=0}^{N-1}(S_k-S)w^k\right| < \varepsilon/2$. Ostatecznie

$$-W < \frac{\varepsilon}{2M} - 1 \qquad W > 1 - \frac{\varepsilon}{2M}$$

dla $W > 1 - \varepsilon/_{2M}$ $|f(W) - S| < \varepsilon$ Oznacza to, że $\lim_{W\to 1} f(W) = S$ ∎

POŻYTKI ZE ZNAJOMOŚCI SZEREGÓW POTĘGOWYCH:

(1) TO I OWO MOŻNA DODAĆ: Obliczyć sumę $S = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+2)}{n(n+1)2^n}$. Zamieniamy na szereg potęgowy:

$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+2)}{n(n+1)}x^n$ Ta funkcja, jeśli istnieje, ma wartość S w punkcie $x=\frac{1}{2}$. Badamy promień zbieżności:

$\frac{1}{R} = \limsup \sqrt[n]{\frac{(n+2)}{n(n+1)}} = 1 \Rightarrow R=1$ f istnieje na odcinku $]-1,1[$, w szczególności w $x=\frac{1}{2}$ też.

$$\frac{n+2}{n(n+1)} = \frac{A}{n} + \frac{B}{n+1} = \frac{A(n+1)+Bn}{n(n+2)} = \frac{(A+B)n+A}{n(n+2)} \qquad \begin{matrix} A=2 \\ B=-1\end{matrix} \quad \dots = \frac{2}{n} - \frac{1}{n+1}$$

$$f(x) = 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n} - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n+1} = -2\log(1-x) - \frac{1}{x}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{n+1} = -2\log(1-x) - \frac{1}{x}\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n} - x\right) = 2\log\frac{1}{1-x} - \frac{1}{x}\left(-\log(1-x) - x\right) =$$

$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}\dots$ $\qquad = 2\log\left(\frac{1}{1-x}\right) + \frac{1}{x}\log(1-x) + 1$

$\log(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\dots$ $\qquad f\left(\frac{1}{2}\right) = 2\log\left(\frac{1}{1-\frac{1}{2}}\right) + 2\cdot\log\left(1-\frac{1}{2}\right) + 1 = 2\log 2 + 2\log\frac{1}{2} + 1 = 1$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+2}{n(n+1)2^n} = 1$$

Znaleźć sumę szeregu anharmonicznego: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$ $\qquad g(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}x^n = -\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}x^n = -\log(1+x) = \log\frac{1}{1+x}$

Badany szereg potęgowy ma promień zbieżności 1. W punkcie $x=1$ jest warunkowo zbieżny. Stosujemy tw. Abela: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n} = \log\frac{1}{1+1} = \log 1/2 = -\log 2$ $\qquad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}x^n = \log 1/2$

(2) FUNKCJE ELEMENTARNE MOŻNA ELEGANCKO ZDEFINIOWAĆ: (wycieczka w stronę funkcji zespolonych)

Do tej pory zdefiniowaliśmy elegancko funkcję logarytm: $\log(x) = \int_1^x \frac{1}{t}\,dt$, funkcję do niej odwrotną $\exp(\cdot)$, oraz pokazaliśmy że $\exp(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$

Powyższy szereg można zapisać dla zmiennej zespolonej $\exp(z) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!}$. Ten szereg ma nieskończony promień zbieżności, zatem exp jest określone na całym $\mathbb{C}$. Korzystając z bezwzględnej zbieżności szeregu możemy wykazać:

$$\exp(z)\exp(w) = \sum\frac{z^n}{n!}\sum\frac{w^m}{m!} = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{n}\left(\frac{1}{m!}\frac{1}{(n-m)!}z^n w^{n-m}\right) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\underbrace{\sum_{m=0}^{n}\frac{n!}{m!(n-m)!}z^n w^{n-m}}_{(z+w)^n} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}(z+w)^n = \exp(z+w)$$

Wstawiamy teraz $z = ix$ dla $x \in \mathbb{R}$ $\exp(ix) = \sum \frac{(ix)^n}{n!}$ i wyznaczamy część rzeczywistą i urojoną

$$\exp(ix) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(ix)^n}{n!} = \underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k}}{2k!}}_{\cos x} + i \underbrace{\sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-1)^l x^{2l+1}}{(2l+1)!}}_{\sin x} = \cos x + i \sin x$$

6.

Oba szeregi mają nieskończony promień zbieżności, definiują więc gładkie funkcje na $\mathbb{R}$. Łatwo też wyprowadzić wzory na pochodne. Obie funkcje można zapisać dla zmiennej zespolonej:

$$\sin(z) = \sum \frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)!} \qquad \cos(z) = \sum \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}$$

Bezpośrednim rachunkiem na bezwzględnie zbieżnych szeregach liczbowych otrzymujemy znane wzory:

$$\sin(z) = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} \qquad \cos(z) = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} \qquad \sin(ix) = i\,sh(x) \qquad \cos(ix) = ch(x) \quad \ldots$$

(3) ZDEFINIOWAĆ π: Do tej pory posługiwaliśmy się π zakładając, że znamy ją z wcześniejszych etapów kształcenia. Teraz możemy zdefiniować π nie odwołując się do długości łuku:

Spójrzmy na funkcję cos: $\cos(x) = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^3 - \cdots$ $\cos(0) = 1$ $\cos(2) = -1 + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(2n)!}(-1)^n 4^n < 0$

cosinus jest funkcją ciągłą, więc na odcinku $]0,2[$ przynajmniej raz przyjmuje wartość 0.

$\cos' x = -\sin x$. $\sin(0) = 0$ $\sin x = x\left(1 - \frac{x^2}{6} + \frac{x^4}{120} - \cdots\right)$

jest to szereg naprzemienny z wyrazem ogólnym malejącym. O znaku sumy decyduje pierwszy wyraz: tu $n=2$: $\frac{1}{4!}16 = \frac{16}{24} = \frac{2}{3} > 0$ A cała suma jest $< \frac{2}{3}$ więc $\cos(2) < -1 + \frac{2}{3} = -\frac{1}{3} < 0$

Dla $x < \sqrt{6}$ suma $-\frac{x^2}{6} + \frac{x^4}{120} - \cdots$ jest ujemna a jej moduł nie przekracza 1 zatem dla $0 < x < \sqrt{6}$ $\sin x$ jest dodatni. Mamy też $2 < \sqrt{6}$

Na odcinku $]0,2[$ $\sin x$ jest dodatni, więc $\cos' x$ jest ujemny. Cosinus jest więc malejący. Wartość zero przyjmowane jest więc tylko raz! Niech x: $x \in]0,2[$ i $\cos x = 0$ będzie oznaczone $\pi/2$. Korzystając z rozmaitych wzorów obliczamy $\cos^2\frac{\pi}{2} + \sin^2\frac{\pi}{2} = 1 \Rightarrow \sin\frac{\pi}{2} = \pm 1$ Wiemy jednak że $\sin\frac{\pi}{2} > 0$ więc $\sin\frac{\pi}{2} = 1$ $\sin\pi = 2\sin\frac{\pi}{2}\cos\frac{\pi}{2} = 0$; $\cos\pi = \cos^2\frac{\pi}{2} - \sin^2\frac{\pi}{2} = -1$. Zatem

$\exp(\pi i) = \cos\pi + i\sin\pi = -1$ oraz $\exp(2\pi i) = \exp^2(\pi i) = 1 = \exp(0)$

Funkcja exp nie jest więc odwracalna na $\mathbb{C}$. Logarytm zespolony nie istnieje jako jednoznaczna funkcja. To prowadzi do bardzo ciekawej zabawy zespolonej ⟶ Analiza Zespolona

(2)

ZADANIE DO SAMODZIELNEGO ROZWIĄZANIA: Udowodnić, że $[0,2\pi[\ni t \longmapsto \exp(it) \in S^1 \subset \mathbb{C}$ jest jednoznaczną parametryzacją okręgu.