SEMESTR II WYKŁAD 3 RÓŻNICZKOWANIE W PRZESTRZENIACH BANACHA

Niech X i Y będą przestrzeniami Banacha, zbiór $\mathcal{U} \subset X$ będzie otwarty. Rozważamy odwzorowanie $f: \mathcal{U} \longrightarrow Y$. Zapisujemy wzór

$$f(x+h) = f(x) + Ah + R(x,h) \qquad \text{gdzie } A \in B(X,Y),\ x,h \in X$$

DEFINICJA Mówimy że f jest różniczkowalne w x jeśli istnieje odwzorowanie liniowe i ciągłe A takie, że reszta R spełnia warunek

$$(*) \qquad \frac{\|R(x,h)\|_Y}{\|h\|_X} \xrightarrow{h \to 0} 0$$

Odwzorowanie A nazywamy pochodną f w punkcie x.

Załóżmy, że f jest różniczkowalne. Sprawdźmy czy pochodna jest dobrze określona. Niech A_1, A_2 będą elementami $B(X,Y)$ takimi, że zachodzi $(*)$ dla R_1, R_2

$$\frac{1}{\|h\|}\left(R_1(x,h) - R_2(x,h)\right) = \frac{1}{\|h\|}\left(f(x+h) - f(x) - A_1h - f(x+h) + f(x) + A_2h\right) = \frac{1}{\|h\|}\left(A_2h - A_1h\right) = (A_2 - A_1)\frac{h}{\|h\|}$$

Ze względu na $(*)$ zachodzi

$$0 = \lim_{h\to 0} \frac{1}{\|h\|}\left(R_1(x,h) - R_2(x,h)\right) = \lim_{h \to 0}(A_2 - A_1)\left(\frac{h}{\|h\|}\right) \quad (*)$$

← zauważmy, że wektor ten ma normę 1.

Załóżmy teraz, że $A_1 \neq A_2$, tzn $A_2 - A_1 \neq 0$. Istnieje zatem przynajmniej jeden wektor $v \in X$ taki, że $(A_2 - A_1)v \neq 0$. Wektor ten można wziąć długości 1. Podsumowując, istnieje $v: \|v\| = 1$ i $(A_2 - A_1)v \neq 0$ zatem także $\|(A_2 - A_1)v\| \neq 0$. Dla dowolnego ciągu (v_n) zbieżnego do v mamy, na podstawie ciągłości A_2 i A_1, że $(A_2 - A_1)v_n \longrightarrow (A_2 - A_1)v \neq 0$. Ciąg v_n wybieramy tak, żeby $\|v_n\| = 1$. To można zrobić dzieląc wyrazy ciągu przez ich $\|\cdot\|$. Dla dostatecznie dużych n wyrazy ciągu liczbowego $\|(A_2 - A_1)v_n\|$ są oddzielone od 0, w szczególności zachodzi $\|(A_2 - A_1)u_n\| > \frac{1}{m}$
Weźmy ciąg $h_n = \frac{1}{m}u_n$. Mamy $h_n \longrightarrow 0$ zatem $(*)$ $\lim_{m\to\infty}(A_2 - A_1)\frac{h_n}{\|h_n\|} \longrightarrow 0$ ale $\frac{h_n}{\|h_n\|} = v_m$ i

$\lim_{m\to\infty} \|(A_2 - A_m)\frac{h_n}{\|h_n\|}\| > \frac{1}{m}$ ← Sprzeczność !!! Wynika z tego że $A_1 = A_2$, tzn pochodna, jeśli istnieje, to jest jedyna.

Pochodną odwzorowania f w punkcie x oznaczamy tradycyjnie $f'(x)$. Zauważmy, że jeśli f jest różniczkowalna w każdym punkcie $x \in \mathcal{U}$ to f' jest odwzorowaniem

$$f': X \supset \mathcal{U} \longrightarrow B(X,Y) \qquad \text{podczas gdy} \qquad f: X \supset \mathcal{U} \longrightarrow Y$$

Pochodna jest więc innym obiektem matematycznym niż wyjściowe odwzorowanie. Zauważmy także, że ciągłość pochodnej $f'(x)$ występująca w definicji dotyczy ciągłości $f'(x)$ jako odwzorowania liniowego, czyli względem przyrostu h. Czym innym, jeszcze przez nas nie dyskutowanym, jest ciągłość pochodnej jako odwzorowanie $f': \mathcal{U} \to B(X,Y)$ czyli względem x.

Pochodną zdefiniowaną jak wyżej nazywamy pochodną mocną albo pochodną Fréche (Fresze (ta))

PRZYKŁADY:

(1) Przykład w nieskończonym wymiarze $X = \mathcal{C}([0,1])$ $\|f\| = \sup_{x\in[0,1]} |f(x)|$

$$f: X \to X \qquad f(v)(t) = \int_0^t v^2(x)\,dx$$

$$f(v+h)(t) = \int_0^t (v+h)^2(x)\,dx = \int_0^t \left(v^2(x) + 2v(x)h(x) + h^2(x)\right) dx = \int_0^t v^2(x)\,dx + 2\int_0^t v(x)h(x)\,dx + \int_0^t h^2(x)\,dx =$$

$$= f(v)(t) + \underbrace{2\int_0^t v(x)h(x)\,dx}_{(Ah)(t)} + \underbrace{\int_0^t h^2(x)\,dx}_{R(v,h)(t)}$$

$$(Ah)(t) = 2\int_0^t v(x)h(x)\,dx$$

jest to odwzorowanie liniowe ze względu na h. Trzeba sprawdzić czy jest ciągłe

$$\|Ah\| = \sup_{t\in[0,1]} |Ah(t)| = \sup_t \left|2\int_0^t v(x)h(x)\,dx\right| \leq 2\sup_t \int_0^t |v(x)h(x)|\,dx = 2\int_0^1 |v(x)h(x)|\,dx \leq 2\sup_x |h(x)| \cdot$$

$$\cdot \int_0^1 |v(x)|\,dx = \underbrace{2\int_0^1 |v(x)|\,dx}_{\text{wyrażenie stałe, tzn niezależne od } h} \|h\| \xrightarrow{h\to 0} 0$$

tzn A jest odwzorowaniem ciągłym. Można policzyć $\|A\|$: $\|A\| \leq 2\int_0^1 |v(x)|\,dx$. Jeśli v jest stałego znaku możemy wziąć $h = \pm 1$ do zrealizowania równości. Jeśli nie, trzeba brać odpowiedni ciąg h_n. Nie będziemy się w to zagłębiać. Tak czy inaczej

$$\|A\| = 2\int_0^1 |v(x)|\,dx$$

Pozostaje badanie reszty:

$$\|R(v,h)\| = \sup_t \left|\int_0^t h^2(x)\,dx\right| = \int_0^1 h^2(x)\,dx \leq \|h\|^2 \qquad \frac{\|R(v,h)\|}{\|h\|} \leq \frac{\|h\|^2}{\|h\|} \leq \|h\| \xrightarrow{h\to 0} 0$$

funkcja podcałkowa nieujemna

Odwzorowanie f jest różniczkowalne w każdym punkcie $v \in X$. Wartość pochodnej dana jest wzorem

$$(f'(v)h)(t) = 2\int_0^t v(x)h(x)\,dx$$

(2) Przykład skończeniewymiarowy : $\mathbb{R}^2 \ni (x,y) \longmapsto x\cos y \in \mathbb{R}$

$$(x+\delta x)\cos(y+\delta y) = (x+\delta x)(\cos y\cos\delta y - \sin y\sin\delta y) = (x+\delta x)\left(\cos y\left[1 - \frac{\delta y^2}{2} + \mathcal{O}(\delta y^4)\right] - \sin y\left[\delta y - \frac{\delta y^3}{6}\right.\right.$$

$$\left.\left.+\mathcal{O}(\delta y^5)\right]\right) = (x+\delta x)\left[\cos y + \cos y\,\mathcal{O}(\delta y^2) - \sin y\,\delta y + \sin y\,\mathcal{O}(\delta y^3)\right] = x\cos y + x\cos y\,\mathcal{O}(\delta y^2) - x\sin y\,\delta y$$

$$+ x\sin y\,\mathcal{O}(\delta y^3) + \cos y\,\delta x + \cos y\,\delta x\,\mathcal{O}(\delta y^2) - \sin y\,\delta x\,\delta y + \sin y\,\delta x\,\mathcal{O}(\delta y^3) =$$

$$\underbrace{x\cos y}_{g(x,y)} + \underbrace{\begin{bmatrix} \cos y & -x\sin y \end{bmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{bmatrix} \delta x \\ \delta y \end{bmatrix}}_{h} + \underbrace{x\cos y\,\mathcal{O}(\delta y^2) + x\sin y\,\mathcal{O}(\delta y^3) + \cos y\,\delta x\,\mathcal{O}(\delta y^2) - \sin y\,\delta x\,\delta y + \sin y\,\delta x\,\mathcal{O}(\delta y^3)}_{R(x,y,\delta x,\delta y)}$$

Zauważmy, że R jest przynajmniej kwadratowe w $\delta x, \delta y$

$$R(x,y,\delta x,\delta y) = \mathcal{O}(\delta y^2) + \mathcal{O}(\delta x)\,\mathcal{O}(\delta y)$$

W tym przykładzie nie musimy sprawdzać ciągłości A, gdyż $A \in L(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ wobec tego jest ciągłe. Musimy za to sprawdzić własności reszty. W $\mathbb{R}^2$ wybieramy normę max, tzn $\|(\delta x, \delta y)\| = \max\{|\delta x|, |\delta y|\}$. Warunek $h \to 0$ oznacza $\max\{|\delta y|, |\delta x|\} \to 0$, czyli obie współrzędne spełniać muszą $\delta x \to 0$ i $\delta y \to 0$. Możemy zatem zbadać zachowanie poszczególnych składników reszty.

$$\frac{\mathcal{O}(\delta y^2)}{\|(\delta x, \delta y)\|} = \frac{c\cdot \delta y^2 + \mathcal{O}(\delta y^3)}{\max\{|\delta x|, |\delta y|\}} \leqslant \frac{c\,\delta y^2 + \mathcal{O}(\delta y^3)}{|\delta y|} \leqslant c|\delta y| + \mathcal{O}(\delta y^2) \xrightarrow{\delta y \to 0} 0$$

$$\frac{\mathcal{O}(\delta x)\mathcal{O}(\delta y)}{\|(\delta x, \delta y)\|} = \frac{c\,\delta x \delta y + \delta y\,\mathcal{O}(\delta x^2) + \delta x\,\mathcal{O}(\delta y^2)}{\max\{|\delta x|, |\delta y|\}} \leqslant \frac{c\,\delta x \delta y + \delta y\,\mathcal{O}(\delta x^2) + \delta x\,\mathcal{O}(\delta y^2)}{|\delta y|} = c\,\delta x\, \mathrm{sgn}\,\delta y +$$

$$\mathrm{sgn}\,\delta y\,\mathcal{O}(\delta x^2) + \delta x\,\mathrm{sgn}\,\delta y\,\mathcal{O}(\delta y) \xrightarrow[\substack{\delta x \to 0 \\ \delta y \to 0}]{} 0$$

Reszta w tym przykładzie spełnia (*), wobec tego $g'(x,y) = [\cos y \quad -x\sin y]$

UWAGI: (1) Odwzorowanie $f: X \to Y$ różniczkowalne w $x \in X$ jest ciągłe w x. Jest to oczywiste gdyż skoro $R(x,h)$ spełnia (*) to także $R(x,h) \xrightarrow{h\to 0} 0$. Wobec ciągłości $f'(x)$ mamy $\lim\limits_{h\to 0} f(x+h) = \lim\limits_{h \to 0}\left(f(x) + \underset{\downarrow\, 0}{f'(x)h} + \underset{\downarrow\, 0}{R(x,h)}\right) = f(x)$.

(2) Odwzorowanie $T: X \to Y$ liniowe i ciągłe (tzn $T \in \mathcal{B}(X,Y)$) jest różniczkowalne w każdym punkcie i $T'(x)h = Th$, tzn $T'(x) = T$ dla dowolnego x.

(3) Dla $f, g: X \to Y$ różniczkowalnych w $x \in X$ obowiązuje wzór $(\alpha f + \beta g)'(x) = \alpha f'(x) + \beta g'(x)$. dowód łatwy i nudny pomijamy.

(4) Z zestawu „podstawowe prawa różniczkowania" nieco uwagi wymaga różniczkowanie złożenia odwzorowań

STWIERDZENIE: $f: X \to Y$, $g: Y \to Z$, f różniczkowalne w x, g różniczkowalne w $f(x)$. Wtedy $g \circ f$ jest różniczkowalne w x i zachodzi

$$(g\circ f)'(x) = g'(f(x)) \circ f'(x)$$

składanie odwzorowań liniowych.

DOWÓD:

$$f(x+h) = f(x) + f'(x)h + R_f(x,h) \qquad g(y+k) = g(y) + g'(y)k + R_g(y,k)$$

$$g(f(x) + \underbrace{f'(x)h + R_f(x,h)}_{k}) = g(f(x)) + g'(f(x))\left[f'(x)h + R_f(x,h)\right] + R_g(f(x),k) =$$

$$= g(f(x)) + \underbrace{g'(f(x))(f'(x)h)}_{g'(f(x))\circ f'(x)h} + g'(f(x))(R_f(x,h)) + R_g(f(x),k)$$

$$\frac{\|g'(f(x))(R_f(x,h))\|}{\|h\|} \leqslant \frac{\|g'(f(x))\|\,\|R_f(x,h)\|}{\|h\|} \xrightarrow{h\to 0} 0$$

$$\frac{\|R_g(f(x), f'(x)h + R_f(x,h))\|}{\|h\|} = \underbrace{\frac{\|R_g(f(x), f'(x)h + R_f(x,h))\|}{\|f'(x)h + R_f(x,h)\|}}_{\xrightarrow{h\to 0} 0} \cdot \frac{\|f'(x)h + R_f(x,h)\|}{\|h\|}$$

$$\leqslant \|f'(x)\| + \frac{\|R_f(x,h)\|}{\|h\|}$$

ograniczone!

FAKT: $f: X \to Y$, $\alpha: X \to \mathbb{R}$. Jeśli f i α są różniczkowalne w x_0 to $x \mapsto \alpha(x) f(x)$ jest różniczkowalne w x_0 i

$$(\alpha f)'(x)h = (\alpha'(x) \cdot h) f(x) + \alpha(x) f'(x) h$$

$$\alpha'(x) \in B(X, \mathbb{R})$$

$$\alpha'(x)h \in \mathbb{R}$$

DOWÓD: Oczywisty...

Obliczanie pochodnej z definicji jest zazwyczaj niepraktyczne. Wprowadzimy teraz pewne ułatwiające życie pojęcie. Niech X, Y będą p. Banacha, weźmy $\mathcal{U} \subset X$, $x \in \mathcal{U}$ $f: \mathcal{U} \to Y$

DEFINICJA: Mówimy, że odwzorowanie f ma pochodną kierunkową w kierunku $v \in X$ jeśli istnieje $\lim_{t \to 0} \frac{f(x+tv) - f(x)}{t}$. Pochodną kierunkową oznaczamy $\nabla_v f(x)$

FAKT: Pochodna kierunkowa, jeśli istnieje, jest jednorodna, tzn $\nabla_{\lambda v} f = \lambda \nabla_v f$.

DOWÓD:

$$\nabla_{\lambda v} f(x) = \lim_{t \to 0} \frac{(f(x + t\lambda v) - f(x))\lambda}{\lambda t} = \lambda \lim_{t \to 0} \frac{f(x + t\lambda v) - f(x))}{(\lambda t)} = \lambda \lim_{s \to 0} \frac{f(x + sv) - f(x)}{s} = \lambda \nabla_v f(x) \quad \blacksquare$$

FAKT: Jeśli f jest różniczkowalne w x to pochodna kierunkowa istnieje w x w każdym kierunku i jest równa $\nabla_v f(x) = f'(x)v$.

DOWÓD

$$\nabla_v f(x) = \lim_{t \to 0} \frac{f(x+tv) - f(x)}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{\cancel{f(x)} + \overbrace{f'(x)tv}^{t\, f'(x) v} + R(x, tv) - \cancel{f(x)}}{t} = \lim_{t \to 0} \left(f'(x)v + \frac{R(x, tv)}{t} \right) =$$

$$= f'(x)v + \lim_{t \to 0} \frac{R(x, tv)\|v\|}{t\|v\|} = f'(x)v + \lim_{t \to 0} \underbrace{\frac{R(x, tv)}{\operatorname{sgn} t \|tv\|}}_{\to 0} \|v\| = f'(x)v. \quad \blacksquare$$

Pochodnej można więc poszukiwać w postaci pochodnej kierunkowej, a potem sprawdzać, czy odwzorowanie $v \mapsto \nabla_v f(x)$ jest liniowe i ciągłe oraz czy znika stosowna reszta. Należy jednak mieć na uwadze że samo istnienie pochodnej kierunkowej jest warunkiem dość słabym. Otwieramy miniejszym galerię funkcji dziwnych:

(1) $f(x,y) = \sqrt{|xy|}$, $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ — w punkcie $(0,0)$ ma pochodną kierunkową w $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ i $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, w pozostałych kierunkach pochodna nie istnieje.

(2) $g: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$g(x,y) = \begin{cases} x \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

pochodna kierunkowa istnieje we wszystkich kierunkach, ale odwzorowanie $v \mapsto \nabla_v g(0,0)$ nie jest liniowe

$$g(t\delta x, t\delta y) = t\delta x \frac{t^2\delta x - t^2 \delta y}{t^2 \delta x + t^2 \delta y} = t\left[\delta x \frac{\delta x^2 - \delta y^2}{\delta x^2 + \delta y^2}\right]$$

$$\nabla_v g(0,0) = \delta x \frac{\delta x^2 - \delta y^2}{\delta x^2 + \delta y^2} \qquad v = \begin{bmatrix} \delta x \\ \delta y \end{bmatrix}$$

jednorodne ale nie liniowe

(3) $h(x,y) = \frac{xy^2}{x^4 + y^2}$, $h: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $h(0,0) = 0$ — Ma pochodną kierunkową w każdym kierunku, pochodna kierunkowa jest liniowa ale h nie jest różniczkowalna w $(0,0)$

$h(t\delta x, t\delta y) = (t\delta x t^2\delta y^2)/(t^4\delta x^4 + t^2\delta x^2) = t\,\frac{\delta x\,\delta y^2}{t^2\delta x^4 + \delta y^2}$

$\frac{h(t\delta x, t\delta y) - h(0,0)}{t} = \frac{\delta x\,\delta y^2}{t^2(\delta x^4) + \delta y^2} \xrightarrow{t \to 0} \frac{\delta x\,\delta y^2}{\delta y^2} = \delta x \qquad \nabla_v h(0,0) = \delta x \qquad v \longmapsto \nabla_v h(0,0) \leftarrow [1,0]$

$\begin{bmatrix}\delta x \\ \delta y\end{bmatrix} \longmapsto \delta x$

$h(0+\delta x, 0+\delta y) = h(0,0) + [1,0]\begin{bmatrix}\delta x \\ \delta y\end{bmatrix} + R(0,0,\delta x,\delta y)$

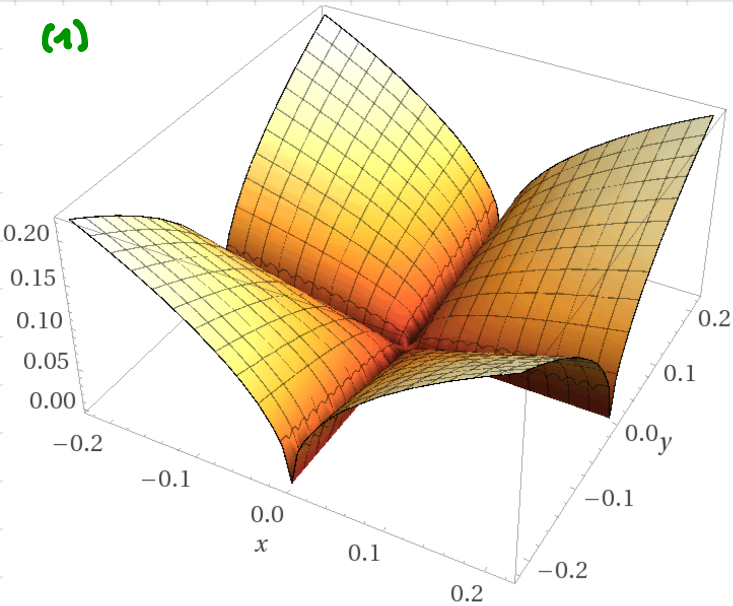
$$R(0,0,\delta x,\delta y) = \frac{\delta x\delta y^2}{\delta x^4 + \delta y^2} - \delta x = \frac{\cancel{\delta x\delta y^2} - \delta x^5 - \cancel{\delta x\delta y^2}}{\delta x^4 + \delta y^2} = \frac{\delta x^5}{\delta x^4 + \delta y^2}$$

$$R(0,0;\tfrac{1}{n},0) = \frac{1/n^5}{\frac{1}{n^4} + 0} = \frac{1}{n} \qquad \frac{R(0,0,\frac{1}{n},0)}{\frac{1}{n}} = 1 \underset{n\to\infty}{\not\longrightarrow} 0$$

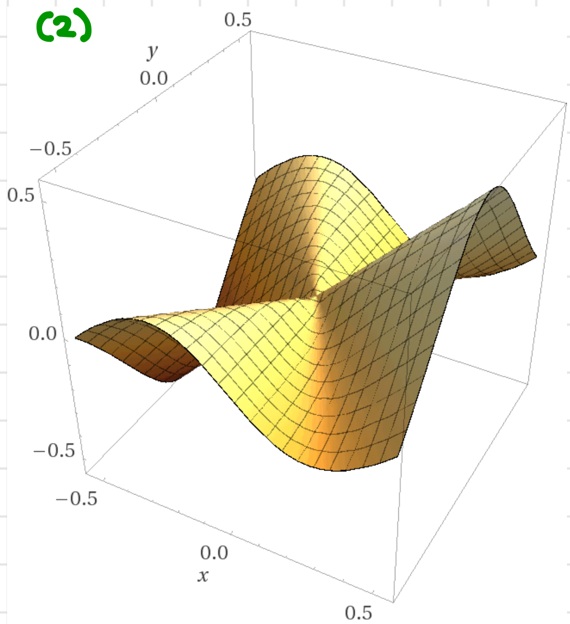
R nie spełnia warunku bycia resztą.

DEFINICJA: Jeśli dla $x \in \mathcal{U}$ pochodne kierunkowe odwzorowania $f: \mathcal{U} \longrightarrow Y$ istnieje w każdym kierunku i $v \longmapsto \nabla_v f$ jest liniowe i ciągłe to mówimy że f jest słabo różniczkowalne. Odwzorowanie $v \longmapsto \nabla_v f$ nazywamy słabą pochodną albo pochodną Gateaux.

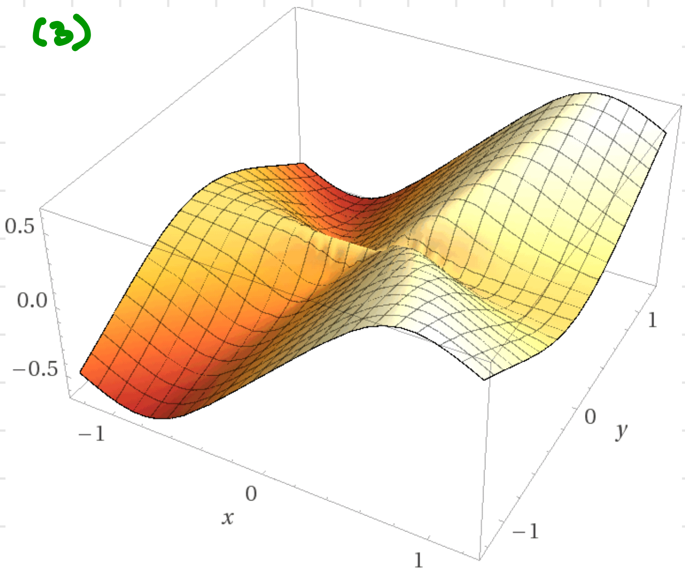
(1)



(2)



(3)



Zdefiniowaliśmy już dwa rodzaje pochodnych: mocne (Fréchet'a) i słabe (Gateaux). Rozważa się jeszcze pochodne w kierunku podprzestrzeni. Jeśli $X = X_1 \times X_2$, $\mathcal{U}_1 \subset X_1$, $\mathcal{U}_2 \subset X_2$, $(x_1, x_2) \in \mathcal{U}_1 \times \mathcal{U}_2$. Pochodną cząstkową odwzorowania $f: \mathcal{U}_1 \times \mathcal{U}_2 \longrightarrow Y$ w kierunku podprzestrzeni X_1 (X_2) nazywamy mocną pochodną odwzorowania

$$X_1 \supset \mathcal{U}_1 \ni \xi \longmapsto f(\xi, x_2) \in Y \qquad \left(X_2 \supset \mathcal{U}_2 \ni \eta \longmapsto f(x_1, \eta) \in Y \right)$$

$$f'_{X_1}(x_1, x_2) \qquad\qquad f'_{X_2}(x_1, x_2)$$

Pochodne w kierunku podprzestrzeni przydadzą się później.

POCHODNE ODWZOROWANIA $\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$

Odwzorowanie $f: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ „składa się" z m funkcji $f^i: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$

$$f: (x_1 \dots x_n) \longmapsto (f^1(x), \dots, f^m(x))$$

Załóżmy, że f jest różniczkowalna w $p \in \mathbb{R}^n$. Pochodna $f'(p) \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ jest więc macierzą mającą n kolumn i m wierszy. j-ta kolumna macierzy to $f'(p)e_j$ zapisane w bazie kanonicznej

to jest „kawałek" słabej pochodnej, tzn $f'(p)e_j = \nabla_{e_j} f(p) = \lim\limits_{t \to 0} \dfrac{f(p+te_j) - f(p)}{t} =$

$$= \lim_{t \to 0} \begin{bmatrix} f^1(p+te_j) - f^1(p) \\ f^2(p+te_j) - f^2(p) \\ \vdots \\ f^m(p+te_j) - f^2(p) \end{bmatrix}$$

Wyraz x^i_j macierzy $f'(p)$ to zatem

$$\lim_{t \to 0} \frac{f^i(p_1, \dots, p_j + t, p_{j+1}, \dots p_n) - f^i(p)}{t} = \frac{\partial f^i}{\partial x^j}(p)$$

inne oznaczenie: $\partial_j f^i$, f^i_j, $f^i_{x^j}$ ...

Podsumowując, jeśli $f: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ jest różniczkowalna w p to $f'(p)$ zapisuje się macierzą

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \frac{\partial f^1}{\partial x^1} & \frac{\partial f^1}{\partial x^2} & \dots & \frac{\partial f^1}{\partial x^n} \\ \frac{\partial f^2}{\partial x^1} & \frac{\partial f^2}{\partial x^2} & \dots & \frac{\partial f^2}{\partial x^n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f^m}{\partial x^1} & \frac{\partial f^m}{\partial x^2} & \dots & \frac{\partial f^m}{\partial x^n} \end{bmatrix}}_{n} \Bigg\} m$$

Macierz pochodnej, *Macierz Jacobiego*

Sprawdzanie różniczkowalności odwzorowania jest cały czas kłopotliwe, tzn wymaga badania reszty nawet w przypadku $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$. Najwygodniej byłoby nam umieć stwierdzić różniczkowalność na podstawie pamięci na pochodne cząstkowe $\frac{\partial f^i}{\partial x^j}$. Stosowne twierdzenie istnieje, ale żeby je udowodnić potrzebujemy jeszcze dodatkowych narzędzi. Sformułujmy to twierdzenie:

TWIERDZENIE: X, Y p. Banacha, $f: X \longrightarrow Y$ jest słabo różniczkowalne na $\mathcal{U} \subset X$. Jeśli słaba pochodna ∇f traktowana jako odwzorowanie $\mathcal{U} \ni x \longmapsto \nabla f(x) \in B(X, Y)$ jest ciągła na $\mathcal{U}$, to f jest klasy C^1 na $\mathcal{U}$, tzn mocna pochodna $f'(x)$ istnieje i jest ciągła jako odwzorowanie $\mathcal{U} \ni x \longmapsto f'(x) \in B(X,Y)$. Oczywiście $f'(x) = \nabla f(x)$.

ciągłe jako odwz. liniowe — ciągłe jako odwz. o wartościach w $B(X,Y)$.

Zauważmy że rozważa się tu dwie ciągłości $h \longmapsto f'(x)h$ $\quad x \longmapsto f'(x) \in B(X,Y)$

TWIERDZENIE O WARTOŚCI ŚREDNIEJ (żeby udowodnić twierdzenie o różniczkowaniu w sposób ciągły)

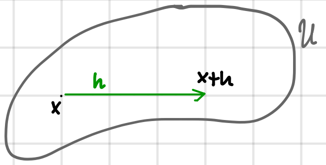
20.

Dla funkcji różniczkowalnych $I \to \mathbb{R}$ obowiązuje Tw. Lagrange'a $f'(c)(b-a) = f(b) - f(a)$ dla pewnego c. Dla $I \to \mathbb{R}^2$ nie mamy nawet na proste uogólnienie: $x \mapsto (f_1(x), f_2(x))$

$$f_1'(c_1)(b-a) = f_1(b) - f_1(a), \quad f_2'(c_2)(b-a) = f_2(b) - f_2(a)$$ i nie ma powodu aby $c_1 = c_2$.

W wielowymiarowym czy Banachowskim przykładzie mamy jedynie oszacowanie

TWIERDZENIE: X, Y p. Banacha, $f: X \supset \mathcal{U} \to Y$ słabo różniczkowalna na $\mathcal{U}$



$$\|f(x+h) - f(x)\| \leqslant \|h\| \sup_{t \in]0,1[} \|\nabla f(x+th)\|$$

DOWÓD: Dowód tego twierdzenia opiera się na istnieniu wystarczająco bogatej przestrzeni funkcjonałów liniowych ciągłych czyli przestrzeni $B(Y, \mathbb{R})$. Istnieje twierdzenie, które mówi, że na przestrzeni unormowanej dla każdego wektora $x \neq 0$ istnieje $\varphi \in B(X, \mathbb{R})$ taki, że $\|\varphi\| = 1$ i $\varphi(x) = \|x\|$.

Weźmy $\varphi \in B(Y, \mathbb{R})$ i skonstruujmy funkcję $\varphi_f: [0,1] \ni t \mapsto \langle \varphi, f(x+th) \rangle \in \mathbb{R}$. Sprawdźmy różniczkowalność tej funkcji

$$\lim_{s \to 0} \frac{1}{s}(\varphi_f(t+s) - \varphi_f(t)) = \lim_{s \to 0} \frac{1}{s}\left(\langle \varphi, f(x+th+sh) \rangle - \langle \varphi, f(x+th) \rangle\right) = \lim_{s \to 0} \frac{1}{s} \langle \varphi, f(x+th+sh) - f(x+th) \rangle =$$

$$= \langle \varphi, \lim_{s \to 0} \frac{1}{s}(f(x+th+sh) - f(x+th)) \rangle = \langle \varphi, \nabla_h f(x+th) \rangle$$ φ_f jest różniczkowalna na $]0,1[$

ciągłość φ

φ_f jest także ciągła na $[0,1]$. Ciągłość na końcach wynika z faktu istnienia ∇f. Słaba różniczkowalność nie pociąga co prawda ciągłości, ale pociąga ciągłość wzdłuż prostych, tzn. $f(p+sh) \xrightarrow{s \to 0} f(p)$ dla $p \in \mathcal{U}$. φ_f spełnia założenie twierdzenia Lagrange'a tzn. istnieje $\xi \in]0,1[$ takie, że

$$\varphi_f(1) - \varphi_f(0) = \varphi_f'(\xi)$$

zależy od φ

$$\langle \varphi, \nabla_h f(x+\xi h) \rangle$$

$$\langle \varphi, f(x+h) \rangle - \langle \varphi, f(x) \rangle$$

Trzeba teraz pozbyć się φ. Idea jest taka: $\varphi \in B(Y, \mathbb{R})$ tzn. φ jest funkcją na Y. Mamy jednak także, dla $y \in Y$ $\varphi \xmapsto{F_y} \langle \varphi, y \rangle$, tzn. y jest funkcją liniową na $B(Y, \mathbb{R})$. Odwzorowanie to jest ograniczone: $\sup_{\|\varphi\| \leqslant 1} |\langle \varphi, y \rangle|$. Wiemy, że $|\langle \varphi, y \rangle| \leqslant \|\varphi\| \|y\|$ tzn. $\sup_{\|\varphi\| \leqslant 1} |\langle \varphi, y \rangle| \leqslant \sup_{\|\varphi\| \leqslant 1} \|\varphi\| \|y\| = \|y\|$

$\|F_y\| \leqslant \|y\|$. Pytanie, czy $\|F_y\| = \|y\|$? Z zielonej uwagi wynika że wartość $\|y\|$ można zrealizować. Oznacza to że $\|y\|$ można patrzeć jak na normę operatorową.

$$\|f(x+h) - f(x)\| = \sup_{\|\varphi\| \leqslant 1} |\langle \varphi, f(x+h) - f(x) \rangle| = \sup_{\varphi \leqslant 1} |\langle \varphi, \nabla_h f(x + \xi_\varphi h) \rangle| \leqslant \sup_{\|\varphi\| \leqslant 1} \|\varphi\| \|\nabla_h f(x + \xi_\varphi h)\| \leqslant$$

$$\leqslant \sup_{t \in]0,1[} \|\nabla_h f(x+th)\| \leqslant \|h\| \sup_{t \in]0,1[} \|\nabla f(x+th)\| \quad \blacksquare$$

Oczywiście jeśli f jest różniczkowalna $\nabla_h f(x) = f'(x)h$ i oszacowanie z twierdzenia przyjmuje postać

$$\|f(x+h) - f(x)\| \leqslant \|h\| \sup_{t \in]0,1[} \|f'(x+th)\|$$

Twierdzenie o wartości średniej przyda nię do udowodnienia naszego twierdzenia o różniczkalaniu w sposób ciągły

DOWÓD:

f jest słabo różniczkowalne, zatem $\nabla f(x)$ istnieje i jest elementem $\mathcal{B}(X,Y)$. Do różniczkowalności potrzebujemy własności reszty:

$R(x_0,h) = f(x_0+h) - f(x_0) - \nabla_h f(x_0)$ Definiujemy $g: U \to Y$ $g(x) = f(x) - \nabla_x f(x_0)$. g jest słabo różniczkowalne i $\nabla g = \nabla f - \nabla f(x_0)$

$$g(x_0+h) - g(x_0) = f(x_0+h) - \nabla_{x_0+h} f(x_0) - f(x_0) + \nabla_{x_0} f(x_0) = f(x_0+h) - f(x_0) - \nabla_h f(x_0)$$

$$\|R(x_0,h)\| = \|g(x_0+h) - g(x_0)\| \leq \|h\| \sup_{t\in]0,1[} \|\nabla g(x_0+th)\| = \|h\| \sup_{t\in]0,1[} \|\nabla f(x_0+th) - \nabla f(x_0)\|$$

$$\frac{\|R(x_0,h)\|}{\|h\|} \leq \sup_{t\in]0,1[} \|\nabla f(x_0+th) - \nabla f(x_0)\| \xrightarrow{h\to 0} 0 \text{ z ciągłości } \nabla f(x) \text{ względem } x.$$ ■

Twierdzenie powyższe działa oczywiście także dla odwzorowań $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$. Jednak wiemy, że istnienie pochodnych kierunkowych (a więc wyrażeń $\frac{\partial f^i}{\partial x^j}$) nie gwarantuje liniowości, tzn. macierz zbudowana z pochodnych cząstkowych nie zawsze jest macierzą słabej pochodnej (tzn. macierz możemy napisać mimo, że słaba pochodna nie istnieje). Dotychczasowe twierdzenie cały czas nie wystarcza do udowodnienia różniczkowalności na podstawie własności pochodnych cząstkowych $\frac{\partial f^i}{\partial x^j}$.

Zapiszmy więc w końcu i udowodnijmy odpowiednie twierdzenie

TWIERDZENIE: Jeśli pochodne cząstkowe $\frac{\partial f^i}{\partial x^j}$ istnieją i są ciągłe to odwzorowanie $(x^1, x^2, \dots, x^n) \xmapsto{F} (f^1, f^2, \dots, f^m)$ jest różniczkowalne w sposób ciągły

DOWÓD:

Kandydatem na pochodną jest oczywiście $(h^i) \longmapsto \left(\frac{\partial f^i}{\partial x^j} h^j\right)$. Szacujemy resztę

$$\left\|F(x^1+h^1, \dots, x^n+h^n) - F(x^1,\dots,x^n) - \sum_{j,i} \frac{\partial f^i}{\partial x^j} h^j e_i\right\| = \left\|F(x^1+h^1, x^2+h^2, \dots) - F(x^1, x^2+h^2, \dots) + F(x^1, x^2+h^2,\dots) - \sum_{j,i}\frac{\partial f^i}{\partial x^j} h^j e_i\right\|$$

baza kanoniczna w $\mathbb{R}^n$

$$\leq \left\|F(x^1+h^1, x^2+h^2, \dots) - F(x^1, x^2+h^2,\dots) - \frac{\partial f^i}{\partial x^1} h^1 e_i\right\| + \left\|F(x^1, x^2+h^2,\dots) - \sum_{j=2}^{n}\sum_i \frac{\partial f^i}{\partial x^j} h^j e_i\right\| \leq$$

$$\leq \sup_{t\in]0,1[} \left\|\sum_i \left[\frac{\partial f^i}{\partial x^1}(x^1+th^1, x^2+h^2,\dots) - \frac{\partial f^i}{\partial x^1}(x^1,x^2,\dots)\right] e_i\right\| +$$

$$+ \left\|F(x^1, x^2+h^2, x^3+h^3, \dots) - F(x^1, x^2, x^3+h^3) - \sum_i \frac{\partial f^i}{\partial x^2} h^2 e_i\right\| + \left\|F(x^1, x^2, x^3+h^3,\dots) - \sum_{j=3}^{n}\sum_i \frac{\partial f^i}{\partial x^j} h^j e_i\right\| \leq$$

$$\leq \sup_{t\in]0,1[} \left\|\sum_i \left[\frac{\partial f^i}{\partial x^1}(x^1+th^1, x^2+h^2, \dots) - \frac{\partial f^i}{\partial x^1}(x^1,x^2,\dots)\right] e_i\right\| |h^1| + \sup_{t\in]0,1[} \left\|\sum_i \left[\frac{\partial f^i}{\partial x^2}(x^1, x^2+th^2, x^3+h^3) - \frac{\partial f^i}{\partial x^2}(x^1,x^2,\dots)\right] e_i\right\| |h^2| +$$

$$+ \dots + \sup_{t\in]0,1[} \left\|\sum_i \frac{\partial f^i}{\partial x^n}(x^1,x^2,\dots,x^n+th^n) - \frac{\partial f^i}{\partial x^n}(x^1,x^2,\dots x^n)\right\| |h^n| \leq \alpha(h)\|h\|$$

pewna funkcja od h o której wiadomo, że $\alpha(h) \xrightarrow{h\to 0} 0$

■