# SEMESTR II WYKŁAD 5 TWIERDZENIE O LOKALNEJ ODWRACALNOŚCI

Twierdzenie o lokalnej odwracalności jest banachowskim odpowiednikiem twierdzenia o istnieniu i różniczkowalności funkcji odwrotnej, którego częścią był wzór $(f^{-1})'(y) = 1/f'(f^{-1}(y))$.

Od strony praktycznej twierdzenie to jest ważne przy rozważaniu krzywoliniowych układów współrzędnych na przestrzeni skończenie wymiarowej.

**TWIERDZENIE** (O LOKALNEJ ODWRACALNOŚCI) $X, Y$ przestrzenie Banacha $f : X \supset \mathcal{U} \longrightarrow Y$ odwzorowanie klasy $C^1$, $x_0 \in \mathcal{U}$, $y_0 = f(x_0) \in Y$ $f'(x_0) : X \to Y$ jest odwracalne. Wtedy istnieją otwarte otoczenie $\vartheta$ punktu $x_0$, $\vartheta \subset \mathcal{U}$ i $\mathcal{V}$ punktu $y_0$ takie, że

$$f|_\vartheta \text{ jest bijekcją } \vartheta \text{ na } \mathcal{V},\quad f^{-1} : \mathcal{V} \to \vartheta \text{ jest klasy } C^1 \text{ i}$$
$$\forall y \in \mathcal{V} \quad (f^{-1})'(y) = \left[f'(f^{-1}(y))\right]^{-1}$$

**DOWÓD** Dowód jest dość długi, podzielimy go więc na pewne etapy:

(1) $f'(x)$ jest odwracalne nie tylko w $x_0$ ale także na pewnym otoczeniu $x_0$

W teorii przestrzeni Banacha funkcjonuje twierdzenie o wykresie domkniętym które mówi że $T : V \to W$ jest liniowe i ciągłe wtedy i tylko wtedy gdy $G_T = \{(v, T(v)) : v \in V\} \subset V \times W$ jest podprzestrzenią domkniętą. Zbiór $G_T$ nazywa się wykresem $T$. Dowód $\Rightarrow$ jest łatwy, $\Leftarrow$ trudny. Jeśli $T$ jest odwracalne to $G_T$ i $G_{T^{-1}}$ różnią się o transpozycję w iloczynie kartezjańskim, więc jeśli $T$ jest ciągłe to $T^{-1}$ też.

Z tego twierdzenia wynika więc, że $[f'(x_0)]^{-1}$ jest odwzorowaniem liniowym i ciągłym. Wykażemy teraz, że zbiór odwzorowań odwracalnych w $B(X, Y)$ jest zbiorem otwartym.

Weźmy $T \in B(X,Y)$ i $T^{-1}$ istnieje. Z rozważań n.t. tw. o wykresie domkniętym wiemy, że $T^{-1}$ jest ciągłe zatem $\|T^{-1}\|$ jest dobrze określona. Weźmy dowolne $S \in B(X,Y)$ takie że $\|S\| < \frac{1}{\|T^{-1}\|}$ wtedy

31

$$\|T^{-1}S\| \leq \|S\|\|T^{-1}\| < 1$$

W takim przypadku istnieje $(\mathbb{1}+T^{-1}S)^{-1}$. Istotnie, niech $F=-T^{-1}S$. Pokażemy że istnieje $(\mathbb{1}-F)^{-1}$. Zaproponujmy ten operator w postaci szeregu $\lim_{n\to\infty}(\mathbb{1}+F+F^2+\dots+F^n)$. Szereg ten jest zbieżny gdyż $\|F\|<1$

$$\left\|\sum_m^n F^i\right\| \leq \sum_m^n \|F\|^i \leq \sum_m^\infty \|F^i\| = \frac{\|F\|^m}{1-\|F\|} \longrightarrow 0$$

Mamy $(\mathbb{1}-F)\lim\limits_{n\to\infty}(1+F+\dots+F^n) = \lim\limits_{n\to\infty}\left[(\mathbb{1}-F)(1+F+\dots+F^n)\right] = \lim\limits_{n\to\infty}\left(\mathbb{1}-F+F-F^2+F^2 \dots -F^{n+1}\right) = \lim\limits_{n\to\infty}\left(\mathbb{1}-F^{n+1}\right) = \mathbb{1}$ (podobnie w drugiej kolejności)

Wiemy więc, że istnieje $(\mathbb{1}+T^{-1}S)^{-1}$. $T \circ (\mathbb{1}+T^{-1}S) = (T+S)$

$\left(T\circ(\mathbb{1}+T^{-1}S)\right)^{-1} = (\mathbb{1}+T^{-1}S)^{-1}T^{-1} = (T+S)^{-1}$ zatem istnieje odwrotne do $T+S$ dla dowolnych $S: \|S\| < \frac{1}{\|T^{-1}\|}$. Zbiór odwzorowań odwracalnych zawiera więc kulę o środku w $T$ i promieniu $1/\|T^{-1}\|$

Wracając do problemu pochodnych, żeby wykazać, że $f'(x)$ jest odwracalne nie tylko w $x_0$ ale i w pobliżu $x_0$ musimy wykazać że $f'(x)$ jest blisko $f'(x_0)$ w normie operatorowej. Z założenia jednak wiemy że $f'(x)$ zależy od $x$ w sposób ciągły zatem $\forall \varepsilon>0\ \exists \delta>0$ taka, że jeśli $\|x-x_0\|<\delta$ to $\|f'(x)-f'(x_0)\|<\varepsilon$. Wystarczy więc wziąć $\varepsilon = \frac{1}{2\|[f'(x_0)]^{-1}\|}$ aby uzyskać wniosek, że istnieje $\delta$ taka, że dla

↑ na teraz wystarczy 1, 2 przyda się później.

$x \in K(x_0,\delta)$ $f'(x) \in K\left(f'(x_0), \frac{1}{2\|(f'(x_0))^{-1}\|}\right)$ w której są jedynie odwzorowania odwracalne. Jako $O$ weźmiemy więc $K(x_0,\delta)$.

(2) $f$ jest różnowartościowe na $\vartheta$

Dla $y \in Y$ zdefiniujmy pomocnicze odwzorowanie $\Phi_y : U \to X$

$$\Phi_y(x) = x + \left[f'(x_0)\right]^{-1}\left(y - f(x)\right)$$

← Dlaczego taka funkcja? ⟶ następna strona

mamy $y = f(x) \iff \Phi_y(x) = x$ Odwzorowanie $\Phi_y$ jest różniczkowalne:

$$\Phi_y'(x) = \mathbb{1}_X - \left[f'(x_0)\right]^{-1} f'(x) = \left[f'(x_0)\right]^{-1}\underbrace{\left(f'(x_0) - f'(x)\right)}$$

dla $x \in \vartheta$ to ma normę mniejszą niż $\frac{1}{2}\| f'(x_0)^{-1} \|$

dla $x \in \vartheta$ $\quad \| \Phi_y'(x) \| < \frac{1}{2}$

Weźmy teraz $x_1, x_2 \in \vartheta$ wtedy

$$\| \Phi_y(x_1) - \Phi_y(x_2) \| = \| \Phi(x_2 + \overbrace{(x_1 - x_2)}^{h}) - \Phi(x_2) \| \leq \|x_1 - x_2\| \sup_{t \in ]0,1[} \| \Phi_y'(x_2 + t(x_1 - x_2)) \| <$$

$$\leq \frac{1}{2}\|x_1 - x_2\|$$

Odwzorowanie $\Phi_y|_\vartheta$ jest odwzorowaniem, które nazywamy zbliżającym
Dla odwzorowań zbliżających mamy twierdzenie, które tu posłuży nam za lemat:

TWIERDZENIE Niech $X$ zupełna przestrzeń metrycz. $\varphi : X \to X$ zbliżające tzn istnieje $0 < \lambda < 1$ taka, że $\forall x_1, x_2$ $\quad d(\varphi(x_1), \varphi(x_2)) \leq \lambda d(x_1, x_2)$
wtedy $\varphi$ ma dokładnie jeden punkt stały, tzn $\exists! x_0 : \varphi(x_0) = x_0$

DOWÓD

$x_1 \in X$ dowolny $x_2 = \varphi(x_1) \ \cdots \ x_n = \varphi(x_{n-1})$

$$d(x_n, x_{m+k}) = d\left(\varphi^{n-1}(x_1), \varphi^{n-1}(x_{k+1})\right) \leq \lambda^{n-1} d(x_1, x_{k+1}) \leq$$

$$\leq \lambda^{n-1}\left(d(x_1, x_2) + d(x_2, x_3) + \cdots + d(x_k, x_{k+1})\right) \leq \lambda^{n-1}\left(\lambda + \lambda^2 + \cdots + \lambda^{k-1}\right) d(x_1, x_2) =$$

$$= \lambda^{n-1} \frac{1 - \lambda^k}{1 - \lambda} d(x_1, x_2) \longrightarrow 0$$

**32 a.**

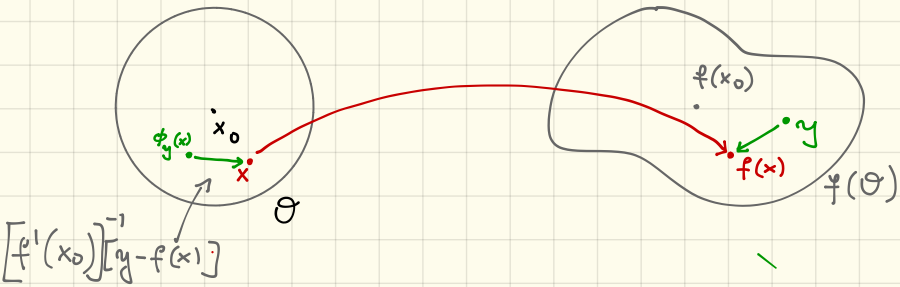
$$\phi_y(x) = x + [f'(x_0)]^{-1}(y - f(x))$$

Wykazanie bijektywności może polegać np na pokazaniu, że istnieje dobrze określone odwzorowanie odwrotne.

$$\phi_y(x) - x = [f'(x_0)]^{-1}(y - f(x))$$

$$f'(x_0)[\phi_y(x) - x] = y - f(x)$$

Załóżmy że mamy parę $(x, f(x))$ i dla ustalonego $y \in f(\mathcal{O})$ takiego, że $y$ jest w pobliżu $f(x)$ chcemy znaleźć $p \in \mathcal{O}$ taki, że $f(p) = 0$.




Skoro różnica $f(x_0+h) - f(x_0)$ jest przybliżana przez $f'(x_0)h$ i $f'(x_0)$ jest odwracalne to $h$ jest przybliżane przez

$$[f'(x_0)]^{-1}(f(x_0+h) - f(x_0))$$

Przyjmujemy to przybliżenie szukając p. Oczywiście okazuje się że $\phi_y(x)$ nie jest dokładnie p, ale dzięki temu że $\phi_y$ jest zbliżające za każdą iteracją $\phi_y$ jesteśmy bliżej celu.

$(x_n)$ jest ciągiem Cauchy'ego w p. zupełnej. Ma granicę, oznaczmy ją $x_0$.
Dla $x_0$ mamy, z ciągłości $\varphi$

33

$$\varphi(x_0) = \varphi(\lim x_n) = \lim \varphi(x_n) = \lim x_{n+1} = x_0 \quad \text{i.e} \quad \varphi(x_0) = x_0$$

Załóżmy że $\exists y: \varphi(y) = y$. Wtedy

$$d(x_0, y) \leqslant \lambda\, d(\varphi(x_0), \varphi(y))$$

$$d(x_0,y) = d(\varphi(x_0), \varphi(y)) \longrightarrow d(x_0, y) = 0 \to y = x_0$$

■

Wróćmy do $\Phi_y$. Jest to odwzorowanie zbliżające, więc dla tych $y$ dla których $\Phi_y|_\vartheta$ ma wartości w $\vartheta$ odwzorowanie to ma dokładnie jeden punkt stały. Dla jakich $y$ tak jest? Patrząc na wzór $\Phi_y(x) = x + (f'(x_0))^{-1}(y - f(x))$ stwierdzamy, że dla takich dla których $y - f(x)$ jest nieduże, czyli dla $y$ w pobliżu $f(x)$ (dla $x \in \vartheta$), z całą pewnością dla $y \in f(\vartheta)$. Punkt stały to punkt $x: y = f(x)$, jednoznacznie wyznaczony dla $y$. Wnioskujemy, że $f|_\vartheta$ jest różnowartościowe.

(3) Weźmy $\mathcal{V} = f(\vartheta)$. Z definicji $\mathcal{V}$ i z punktu (2) $f: \vartheta \longrightarrow \mathcal{V}$ jest bijekcją. Pokazać należy, że $\mathcal{V}$ jest otoczeniem $y_0$, czyli w szczególności, że $\mathcal{V}$ jest zbiorem otwartym w $Y$.

Weźmy $y \in \mathcal{V}$ i odpowiedni, jedyny $x \in \vartheta$ taki, że $f(x) = y$. Wiemy, że $\vartheta$ jest otwarty więc istnieje $r$: $\overline{K}(x, r) \subset \vartheta$. Weźmy promień $\delta = \frac{r}{2\|f'(x_0)^{-1}\|}$
Pokażemy, że $\forall_{z \in K(y,\delta)}\ z \in \mathcal{V}$

Weźmy więc dowolne $z \in K(y, \delta)$ i rozważmy $\Phi_z(\xi)$ dla $\xi \in K(x, r)$

$$\|\Phi_z(\xi) - x\| \leqslant \|\Phi_z(\xi) - \Phi_z(x)\| + \|\Phi_z(x) - x\| \leqslant \tfrac{1}{2}\|\xi - x\| + \|f'(x_0)^{-1}(z - \overset{y}{\overset{\|}{f(x)}})\| \leqslant$$

$$\leqslant \tfrac{1}{2} r + \|f'(x_0)^{-1}\| \underbrace{\|z - y\|}_{\leqslant \delta} \leqslant \tfrac{1}{2} r + \tfrac{1}{2} r = r \qquad \Phi_z(\xi) \in K(x, r) \subset \vartheta$$

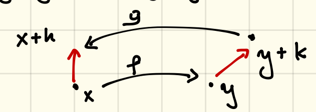
$\Phi_\xi|_{K(x,r)}$ ma wartości w $K(x,r)\subset \mathcal{O}$ zatem $\Phi_\xi$ ma punkt stały w $\mathcal{O}$, a nawet więcej w $K(x,r)$. Nazwijmy ten punkt stały $\xi_0$. Wiadomo zatem, że $\Phi_\xi(\xi_0)=\xi_0$ czyli $f(\xi_0)=\xi$. Wniosek: $\xi\in f(\mathcal{O})=\mathcal{V}$. $\xi$ było dowolne z $K(y,d)$, zatem $K(y,d)\subset\mathcal{V}$ i $\mathcal{V}$ otwarty.

(4) Wiemy już że istnieją $\mathcal{O}$ i $\mathcal{V}$ otoczenie $x_0$ i $y_0$ takie, że $f:\mathcal{O}\to\mathcal{V}$ jest bijekcją, tzn $f^{-1}$ istnieje. Dowodzimy teraz różniczkowalności $f^{-1}$.

Dla ułatwienia notacji oznaczamy $f^{-1}=:g$

Weźmy $y\in\mathcal{V}$ i $k\in Y$ taki, żeby $y+k\in\mathcal{V}$, czyli $\|k\|$ mała. Spodziewamy się, zgodnie z tezą, że $g'(y)=(f'(x))^{-1}$ dla $x:\ f(x)=y$

$$r_g(y,k)= g(y+k)-g(y)-(f'(x))^{-1}k = \cancel{x}+h-\cancel{x}-(f'(x))^{-1}k =$$



$$= h-(f'(x))^{-1}k = [f'(x)]^{-1}\big(f'(x)h-k\big) =$$

$$=[f'(x)]^{-1}\Big(f'(x)h-[f(x+h)-f(x)]\Big) = -[f'(x)]^{-1}\big(f(x+h)-f(x)-f'(x)h\big) =$$

$$= -[f'(x)]^{-1}\, r_f(x,h)$$

$$r_g(h,k)= -[f'(x)]^{-1} r_f(x,h)$$

$$\frac{\|r_g(h,k)\|}{\|k\|} = \frac{1}{\|k\|}\,\|[f'(x)]^{-1}\|\,\|r_f(x,h)\| \leqslant \|(f'(x))^{-1}\|\ \underbrace{\frac{\|h\|}{\|k\|}}_{\text{ograniczone}}\ \frac{\|r_f(x,h)\|}{\|h\|}$$

$k\to 0$ pociąga $h\to 0$

jak się ma h do k

$h\to 0$

0

$$\|\Phi_y(x+h)-\Phi_y(x)\|\leqslant \tfrac{1}{2}\|h\|$$

$$\Phi_y(x+h)-\Phi_y(x) = x+h+\underbrace{[f'(x_0)]^{-1}}_{A}\big(y-f(x+h)\big)-\Big(x+[f'(x)]^{-1}\big(y-f(x)\big)\Big) = \cancel{x}+h+\cancel{Ay}-A(f(x+h))$$

$$-\cancel{x}-\cancel{Ay}+Af(x) = h-A\big(\underbrace{f(x+h)-f(x)}_{k}\big) = h-[f'(x)]^{-1}k$$

$$\|h - \underbrace{[f'(x_0)]^{-1}}_{A} k\| \leqslant \tfrac{1}{2}\|h\|$$

$h = h + Ak - Ak$ $\quad \|h\| \leqslant \|h - Ak\| + \|Ak\| \leqslant \frac{1}{2}\|h\| + \|A_k\|$

$\frac{1}{2}\|h\| \leqslant \|Ak\| \leqslant \|A\|\|k\|$

$\|h\| \leqslant 2\|A\|\,\|k\|$ zatem $k \to 0$ pociąga $h \to 0$

$\frac{\|h\|}{\|k\|} \leqslant 2\|A\|$ tzn ograniczone.

Pokazaliśmy więc, że reszta zachowuje się właściwie.

(5) Udowodniliśmy różniczkowalność $f^{-1}$. Pozostaje wykazać "w sposób ciągły" Ponieważ mamy wzór $(f^{-1})'(y) = [f'(f^{-1}(y))]^{-1}$ i wiemy, że $f$ jest różniczkowalna w sposób ciągły wystarczy pokazać, że ciągłe jest odwzorowanie

$$B(X,Y) \ni T \xmapsto{D} T^{-1} \in B(Y,X)$$

W celach ogólnorozwojowych pokażemy więcej – jest to odwzorowanie różniczkowalne i

$$D'(T)H = -T^{-1} \circ H \circ T^{-1} \quad \left(H \in B(X,Y) \text{ - przyrost}\right)$$

$$D(T+H) - D(T) = (T+H)^{-1} - T^{-1} = (\mathbb{1} + T^{-1}H)^{-1}T^{-1} - T^{-1} =$$

$$= \left[(\mathbb{1} + T^{-1}H)^{-1} - \mathbb{1}\right]T^{-1} = \left[\mathbb{1} - T^{-1}H + (T^{-1}H)^2 - \dots - \mathbb{1}\right]T^{-1} =$$

Jeśli $\|T^{-1}H\| < 1$
tzn $\|H\| < 1/\|T^{-1}\|$

$$= \underbrace{-T^{-1}HT^{-1}}_{\text{pochodna}} + \underbrace{(T^{-1}H)^2T^{-1} + \dots}_{\text{reszta}}$$

$$\|(T^{-1}H)^2T^{-1} + (T^{-1}H)^3T^{-1} + \dots\| \leqslant \|T^{-1}\|\,\|T^{-1}H\|^2\left(1 + \|T^{-1}H\| + \dots\right) \leqslant$$

$$\leqslant \|T^{-1}\|^3 \underbrace{\|H\|^2}_{} \frac{1}{1 - \|T^{-1}H\|}$$

ten czynnik gwarantuje zachowanie reszty. ∎