SEMESTR II WYKŁAD 6 UKŁADY WSPÓŁRZĘDNYCH W $\mathbb{R}^n$, TFU

W trakcie tego wykładu pracujemy w przestrzeniach wymiaru skończonego.

Rozwiązując problemy fizyczne np. z zakresu mechaniki klasycznej czy elektrostatyki czy elektrodynamiki wprowadzamy w przestrzeni fizycznej układ współrzędnych. Zastanówmy się co to znaczy z punktu widzenia struktur matematycznych. Zazwyczaj wprowadzamy układ współrzędnych o którym mówimy kartezjański. Ustalamy początek układu w jakimś punkcie i ustawiamy osie x, y, z tak żeby było wygodnie dbając o to, żeby kierunki osi były pod kątem prostym, wersory miały długość 1 i układ był odpowiednio zorientowany zgodnie z regułą prawej ręki. Oznacza to, że (1) przestrzeń fizyczna nie jest przestrzenią wektorową, ponieważ w przeciwnym razie zero byłoby w ustalonym od początku punkcie. (2) kierunki x, y, z nie są od początku wyróżnione (3) wiadomo co to znaczy że wektory są prostopadłe i mają długość 1. (4) jest wyróżniona orientacja.
Odpowiednią strukturą matematyczną okazuje się przestrzeń afiniczna.

DEFINICJA Przestrzenią afiniczną nazywamy zbiór A wraz z przestrzenią wektorową V i odwzorowaniem $\alpha: A\times V \longrightarrow A$ spełniającym warunki:
(1) $\forall a\in A,\ v,w\in V \quad \alpha(\alpha(a,v),w) = \alpha(a, v+w)$ (2) $\alpha(a,\bar{0}) = a$
(3) $\forall a,b\in A\ \exists!\ v\in V: \ \alpha(a,v) = b$

Zazwyczaj zamiast $\alpha(a,v)$ piszemy $a+v$. Wówczas warunki przyjmują postać
$(a+v)+w = a+(v+w)$, $a+\bar{0} = a$, $\forall a,b\ \exists!\ v: \ a+v=b$. Dodatkowo piszemy $v = b-a$ dla v spełniającego Przestrzeń V nazywamy modelową przestrzenią wektorową dla A. Wiemy już, że V jest topologiczna, odwzorowanie α może posłużyć do przeniesienia topologii na A. Dokładniej A jest wyposażone w taką topologię, żeby każde odwzorowanie $\alpha_a: A\longmapsto V : b\longmapsto b-a$ było homeomorfizmem. Wymiarem przestrzeni A nazywamy wymiar modelowej przestrzeni V.

Dla celów fizycznych „goła" strukture afiniczna nie wystarcza. Potrzebujemy iloczynu skalarnego w V żeby mierzyć odległości i wiedzieć czym są kąty oraz orientacji w V żeby wiedzieć jak wybrać prawoskrętne współrzędne. Ostatecznie przestrzeń fizyczna to trójwymiarowa przestrzeń afiniczna której modelowa przestrzeń wektorowa jest zorientowaną przestrzenią euklidesową. W fizyce klasycznej pojawiają się też inne przestrzenie afiniczne. Np. czasoprzestrzeń Minkowskiego jest to czterowymiarowa przestrzeń afiniczna której przestrzeń modelowa wyposażona jest w formę dwuliniową, niezdegenerowaną o sygnaturze Lorenzowskiej. Czasoprzestrzeń Newtona jest to czterowymiarowa przestrzeń afiniczna, której przestrzeń modelowa wyposażona jest w niezerową jednoformę czasu τ oraz iloczyn skalarny na przestrzeni $V\supset E_0 = \ker\tau$.

DEFINICJA: Układem współrzędnych w zbiorze otwartym $\mathcal{U}\subset A$ nazywamy odwzorowanie $\Phi: \mathcal{U}\longrightarrow \mathbb{R}^n$ klasy C^1 injektywne.

W przestrzeni afinicznej jest wyróżniona klasa układów współrzędnych prostoliniowych. Ustalając bazę $e=(e_1, e_2, \dots e_n)$ w V i wybierając punkt $a_0 \in A$ definiujemy

$$F: \mathbb{R}^n \longrightarrow A : (x^1, x^2, \dots, x^n) \longmapsto a_0 + x^1 e_1 + x^2 e_2 + \dots + x^n e_n$$

Spełnia założenie tw. o lokalnej odwracalności, ponadto jest globalnie injektywne, zatem jest dyfeomorfizmem. Odwzorowanie $\Phi = F^{-1}$ jest globalnym, prostoliniowym układem współrzędnych na A. W fizyce używamy także często innych układów współrzędnych. Np w $\mathbb{R}^2$ używamy układu współrzędnych biegunowych. Łatwiej jest podać odwzorowanie odwrotne do Φ

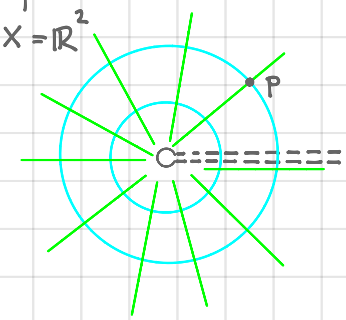
$$\Phi^{-1}:]0,\infty[\times]0,2\pi[\ni (r,\varphi) \longmapsto (r\cos\varphi, r\sin\varphi) \in \mathbb{R}^2$$

Φ określone jest na $\mathbb{R}^2 \supset \mathcal{U} = \mathbb{R}^2 \setminus \{(x,0) : x \geq 0\}$

Samo Φ ma znacznie mniej przyjemną definicję: $r(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$ $\quad \varphi(x,y) = \begin{cases} \operatorname{arctg} y/x & x,y>0 \\ \frac{\pi}{2} & x=0, y>0 \\ \pi + \operatorname{arctg}\frac{y}{x} & x<0 \\ \frac{3\pi}{2} & x=0, y<0 \\ 2\pi + \operatorname{arctg} y/x & x>0\ y<0 \end{cases}$

Biegunowy układ współrzędnych dobrze nadaje się do uzasadnienie potrzeby wprowadzenie nowych pojęć

$X = \mathbb{R}^2$



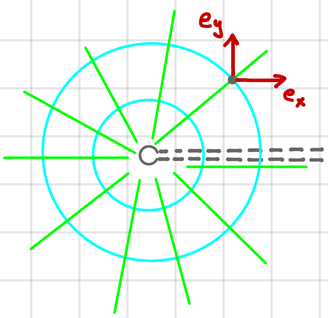
Załóżmy, że w otoczeniu punktu $p \in \mathcal{O}$ określona jest funkcja f, różniczkowalna. Istnieje zatem

$$f'(p) \in B(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{skończony wymiar}}}{=} L(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$$

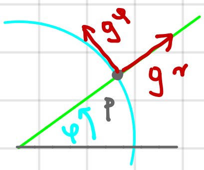
$f'(p)$, jako odwzorowanie liniowe można wyrazić macierzą w bazie.

Zazwyczaj korzystamy z bazy kanonicznej w $\mathbb{R}^2$. Dlaczego to $\mathbb{R}^2$ jest na czerwono? Dlatego, że jest to przestrzeń przyrostów a nie wyjściowe $\mathbb{R}^2$. W
W bazie kanonicznej mamy oczywiście

$$f'(p) = \left[\frac{\partial f}{\partial x}(p) \quad \frac{\partial f}{\partial y}(p) \right]$$



W przestrzeni $\mathbb{R}^2$ możemy też użyć innej bazy. Na przykład takiej: obróconej o kąt φ



$g_r = \cos\varphi\, e_x + \sin\varphi\, e_y$
$g_\varphi = -\sin\varphi\, e_x + \cos\varphi\, e_y$

$$[f'(p)]^1_g = [f'(p)]^1_e [id]^e_g$$

$$\left[[g_r]^e \quad [g_\varphi]^e \right] = \begin{bmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix}$$

$$[f'(p)]^1_g = [f_x \quad f_y] \begin{bmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix} = [\cos\varphi f_x + \sin\varphi f_y \quad -\sin\varphi f_x + \cos\varphi f_y]$$

Widać, że baza f jest jakoś związana z układem współrzędnych Φ. Intuicyjnie rzecz biorąc f_φ jest „styczny" do linii stałego r a f_r „styczny" do linii stałego φ.

DEFINICJA: (A,V) - przestrzeń afiniczna. Wektorem stycznym do krzywej $\gamma : I \longrightarrow A$ w $t=0$ nazywamy wektor

$$v = \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}\left(\gamma(t)-\gamma(0)\right)$$

Używa się też oznaczeń $\dot{\gamma}(0)$, $\gamma'(0)$, $t\gamma(0)$ ...

Zbiór wszystkich wektorów stycznych w punkcie a do A oznaczamy T_aA. Łatwo sprawdzić, że istnieje jednoznaczne odpowiedniość między T_aA i V:

$v \in V$ $\quad \gamma_v(t) = a + tv$ $\quad v = \dot{\gamma}(0)$

Wracamy do bazy g $\left(w\ T_p\mathbb{R}^2 \simeq \mathbb{R}^2\right)$ Mamy dwie krzywe

$$\gamma_\varphi : t \longmapsto \left(x_\varphi(t) = r\cos(\varphi+t),\ y_\varphi(t) = r\sin(\varphi+t)\right)$$

$$\gamma_r : t \longmapsto \left(x_r(t) = (r+t)\cos\varphi,\ y_r(t) = (r+t)\sin\varphi\right)$$

$$\gamma_\varphi'(0) = \begin{bmatrix} -r\sin\varphi \\ r\cos\varphi \end{bmatrix} \qquad \gamma_\varphi'(0)1 = -r\sin\varphi\, e_x + r\cos\varphi\, e_y = r\, g_\varphi = \partial_\varphi$$

$$\gamma_r'(0) = \begin{bmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \end{bmatrix} \qquad \gamma_r'(0)1 = \cos\varphi\, e_x + \sin\varphi\, e_y = g_r = \partial_r$$

Baza wektorów stycznych do krzywych współrzędnościowych to niemal ta baza którą zaproponowaliśmy wcześniej, z dokładnością do długości jednego z wektorów. Skąd oznaczenie ∂_φ, ∂_r ? Policzmy

$$\tilde{f}(r,\varphi) = f\left(x(r,\varphi), y(r,\varphi)\right) \qquad \tilde{f} :]0,\infty[\times]0,2\pi[\ni (r,\varphi) \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$\frac{\partial\tilde{f}}{\partial\varphi} = \frac{\partial f}{\partial x}(-r\sin\varphi) + \frac{\partial f}{\partial y}(r\cos\varphi) \qquad \frac{1}{r}$$

$$\frac{\partial\tilde{f}}{\partial r} = \frac{\partial f}{\partial x}\cos\varphi + \frac{\partial f}{\partial y}\sin\varphi$$

$$\left[\frac{\partial\tilde{f}}{\partial r} \quad \frac{1}{r}\frac{\partial\tilde{f}}{\partial\varphi}\right]$$

$$\|$$

$$[f'(p)]_g^1 = \begin{bmatrix} f_x & f_y \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\varphi f_x + \sin\varphi f_y & -\sin\varphi f_x + \cos\varphi f_y \end{bmatrix}$$

$$[f'(p)]^1_{(\partial_r,\partial_\varphi)} = \left[\frac{\partial\tilde{f}}{\partial r} \quad \frac{\partial\tilde{f}}{\partial\varphi}\right]$$

GRADIENT: Niech $f: A \to \mathbb{R}$ będzie funkcją różniczkowalną. Załóżmy także, że A jest modelowane na przestrzeni euklidesowej, tzn przestrzeni wektorowej z iloczynem skalarnym. Iloczyn skalarny jest to dwuliniowa, symetryczna niezdegenerowana i dodatnio określona forma na V. Zanim zdefiniujemy gradient przyjrzyjmy się strukturze przestrzeni euklidesowej.

Każdej dwuliniowej formie symetrycznej $q: V\times V \to \mathbb{R}$ towarzyszą dwa odwzorowania: forma kwadratowa $V \ni v \mapsto q(v,v)$ i odwzorowanie samosprzężone $Q: V \to V^*$ $Q(v) = q(v,\cdot)$. Każde z tych odwzorowań: formę dwuliniową symetryczną, formę kwadratową, odwzorowanie samosprzężone, wyznacza dwa pozostałe. Nam przyda się odwzorowanie samosprzężone $G: V \to V^*$ związane z iloczynem skalarnym $g: V\times V \to \mathbb{R}$. Ponieważ g jest niezdegenerowany to G jest izomorfizmem. Możemy więc użyć $G^{-1}: V^* \to V$.

Pochodna f w punkcie $a\in A$ jest elementem $L(V,\mathbb{R}) = V^*$ tzn $f'(a) \in V^*$.

$$(\operatorname{grad} f)(a) = (\overline{\nabla} f)(a) = G^{-1}(f'(a))$$

Jak rzecz policzyć we współrzędnych? Zaraz odpowiemy na to pytanie, najpierw jednak zapiszmy we współrzędnych G i g. Załóżmy, że $e=(e_1,\dots,e_n)$ jest bazą w V. Wtedy wektory $v,w\in V$ zapisać możemy. $v = \sum_i v^i e_i$ $w=\sum_j w^j e_j$

$$g(v,w) = g\left(\sum_i v^i e_i, \sum_j w^j e_j\right) = \sum_i\sum_j v^i w^j \underbrace{g(e_i,e_j)}_{g_{ij}} = \sum_{ij} v^i w^j g_{ij}$$

Liczby g_{ij} układamy w symetryczną macierz:

$$[g]_e = \begin{array}{cc} & \xrightarrow{i} \\ j\downarrow & \begin{bmatrix} & & \\ & g_{ij} & \\ & & \end{bmatrix} \end{array}$$

wtedy $g(v,w) = ([w]^e)^T [g]_e [v]^e$

Niech teraz $\varepsilon = (\varepsilon^1,\dots,\varepsilon^n)$ będzie bazą w V^* dualną do e, tzn $\langle \varepsilon^i, e_j\rangle = \delta^i_j$. Odwzorowanie G można zapisać w postaci macierzy $[G]^\varepsilon_e$ jak każde odwzorowanie liniowe. Co to będzie za macierz? Element G^i_j macierzy $[G]^\varepsilon_e$ leży w i-tym wierszu j-tej kolumny. Zgodnie z zasadą kolumny macierzy to obrazy wektorów bazowych z z dziedziny zapisane w bazie przestrzeni docelowej. j-ta kolumna to zatem $[G(e_j)]^\varepsilon$. Znajomość pary baz dualnych umożliwia takie rozkładanie wektora w bazie. I tak mamy

$$G(e_j)^i = \langle G(e_j), e_i\rangle = g(e_j,e_i)$$

$$\begin{array}{cc} & \xrightarrow{j} \\ i\downarrow & \begin{bmatrix} & & \\ & G(e_j)^i & \\ & & \end{bmatrix} \end{array}$$

Macierze G i g są względem siebie transponowane (efekt wyborów) ale z powodu symetrii wychodzi, że są jednakowe.

Zwróćmy jeszcze uwagę na jedną rzecz: jeśli $\alpha\in V^*$ to α można zapisać jako macierz na dwa sposoby: jako element p.w. w bazie ε, $[\alpha]^\varepsilon$ – wektor kolumnowy, albo jako odwzorowanie $V\to\mathbb{R}$ w bazach e w V i $\{1\}$ w $\mathbb{R}$, $[\alpha]^1_e$ – wektor wierszowy.

Mamy $$\left([\alpha]^1_e\right)^T = [\alpha]^\varepsilon$$

$\begin{bmatrix} & & \end{bmatrix}$ $\uparrow_i$ i-ta kolumna to $\langle \alpha, e_i \rangle$

$\begin{bmatrix} \\ \\ \\ \end{bmatrix} \leftarrow 1$ W i-tym wierszu jest współczynnik przy ε^i czyli $\langle \alpha, e_i \rangle$

40

Teraz możemy zapisać grad f we współrzędnych. Załóżmy, że $e=(e_1, \dots, e_n)$ jest ortonormalną bazą w V, $(x^1, \dots, x^n)$ to współrzędne prostoliniowe odpowiadające tej bazie i dowolnemu wyborowi a_0.

$$[f'(a)]_e^1 = \left[\frac{\partial f}{\partial x^1}, \frac{\partial f}{\partial x^2} \dots \frac{\partial f}{\partial x^n}\right] \qquad [G]_e^\varepsilon = \begin{bmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{bmatrix}$$

$$\operatorname{grad} f = \begin{bmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x^1} \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x^n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x^1} \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x^n} \end{bmatrix} = \frac{\partial f}{\partial x^1} e_1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x^n} e_n$$

Tak będzie np we współrzędnych kartezjańskich w $\mathbb{R}^3$

Teraz przyjmijmy, że jesteśmy w $\mathbb{R}^2$ z biegunowym układem współrzędnych. Wiadomo, że w punkcie (r, φ) pochodna f zapisana w bazie $(\partial_r, \partial_\varphi)$ to

$$[f'(r,\varphi)]_{(\partial_r, \partial_\varphi)} = \left[\frac{\partial f}{\partial r} \quad \frac{\partial f}{\partial \varphi}\right]$$

Macierz G znajdziemy wyznaczając $g(\partial_r, \partial_r)$ $g(\partial_\varphi, \partial_\varphi)$ i $g(\partial_\varphi, \partial_r)$

$$\partial_r = \frac{\partial x}{\partial r}\partial_x + \frac{\partial y}{\partial r}\partial_y = \cos\varphi\, \partial_x + \sin\varphi\, \partial_y$$

$$\partial_\varphi = \frac{\partial x}{\partial \varphi}\partial_x + \frac{\partial y}{\partial \varphi}\partial_y = -r\sin\varphi\, \partial_x + r\cos\varphi\, \partial_y$$

wiemy że (∂_x, ∂_y) stanowi bazę ortonormalną więc

$$g(\partial_r, \partial_r) = 1 \quad g(\partial_\varphi, \partial_\varphi) = r^2$$
$$g(\partial_r, \partial_\varphi) = 0$$

$$[G]_{(\partial_r, \partial_\varphi)}^{(dr, d\varphi)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & r^2 \end{bmatrix} \qquad G^{-1}: \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{r^2} \end{bmatrix}$$

$$[\operatorname{grad} f]^{\partial_r, \partial_\varphi} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{r^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial r} \\ \frac{\partial f}{\partial \varphi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial r} \\ \frac{1}{r^2}\frac{\partial f}{\partial \varphi} \end{bmatrix} = \frac{\partial f}{\partial r}\partial_r + \frac{1}{r^2}\frac{\partial f}{\partial \varphi}\partial_\varphi =$$

$$= \frac{\partial f}{\partial r} e_r + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \varphi} e_\varphi$$

$$e_r = \partial_r \qquad e_\varphi = \frac{1}{r}\partial_\varphi$$

Niestety na razie nie damy rady przyzwoicie objaśnić dywergencji, rotacji i laplasjanu. Brakuje jednego fundamentalnego pojęcia o którym mowa będzie dopiero w trzecim semestrze.

TWIERDZENIE O FUNKCJACH UWIKŁANYCH.

TWIERDZENIE X, Y, Z - przestrzenie Banacha $X \oplus Y \supset \mathcal{U}$ otwarty $f : \mathcal{U} \to Z$ odwzorowanie klasy C^1 $(x_0, y_0) \in \mathcal{U}$, $f(x_0, y_0) = 0$

Jeśli $f'_y(x_0, y_0)$ jest izomorfizmem $Y \to Z$ wtedy istnieje otoczenie ϑ punktu x_0 w X i $\mathcal{V}$ punktu y_0 w Y takie, że $\vartheta \times \mathcal{V} \subset \mathcal{U}$ oraz odwzorowanie $g : \vartheta \to \mathcal{V}$ takie, że $f(x, g(x)) = 0$, g jest klasy C^1 oraz

$$g'(x) = -\left[f'_y(x, g(x))\right]^{-1} f'_x(x, \varphi(x))$$

DOWÓD: W dowodzie korzystamy z twierdzenia o istnieniu odwzorowania odwrotnego. W tym celu skonstruujmy

$$\Phi : X \oplus Y \supset \mathcal{U} \longrightarrow X \oplus Z$$
$$(x, y) \longmapsto (x, f(x, y))$$

Φ jest klasy C^1 jako złożenie odwzorowań klasy C^1. Liczymy pochodną

$$\Phi'(x,y) \in B(X \oplus Y, X \oplus Z) \qquad \Phi'(x,y) = \begin{bmatrix} 1_X & 0 \\ f'_x & f'_y \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} X \to X & Y \to X \\ X \to Z & Y \to Z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h \\ k \end{bmatrix}$$

Z założenia, że f'_y jest izomorfizmem wynika że $\Phi'(x_0, y_0)$ jest izomorfizmem

Φ spełnia więc założenie tw. o lokalnej odwracalności. Na podstawie tego twierdzenia istnieje otoczenie $\Omega \subset X \oplus Y$ punktu (x_0, y_0) (zmniejszając ewentualnie Ω można uznać, że jest postaci $\vartheta \times \mathcal{V}$) i otoczenie Λ punktu $(x_0, 0) \in X \oplus Z$ takie że $\Phi : \Omega \to \mathcal{V}$ jest bijekcją, istnieje Φ^{-1} klasy C^1 oraz

$$(\Phi^{-1})'(\Phi(\xi, \eta)) = \Phi'(\xi, \eta)^{-1}$$

$\Phi(x,y)=(x,f(x,y))$ bijekcja tzn $\forall (x,y)\ \exists! (\xi,\zeta) : (\xi,\zeta)=(x,f(x,y))$

Odwzorowanie Φ^{-1} musi być postaci 42

$$(\xi,\zeta)\longmapsto(\xi,\underbrace{\Psi(\xi,\zeta)}_{y})$$

Możemy więc położyć $g(x)=\Psi(x,0)$ Φ jest klasy C^1, więc Ψ oraz g są także C^1, ponadto mamy równość

$0=f(x,g(x))$ tzn $x\longmapsto f(x,g(x))$ jest stała i ma pochodną równą zero. Ta pochodna to odwzorowanie

$$h\longmapsto f'_x(x,g(x))h+f'_y(x,g(x))g'(x)h \quad (=0)$$

$\forall h$ $$f'_y(x,g(x))g'(x)h=-f'_x(x,g(x))h$$

$$g'(x)h=-\left[f'_y(x,g(x))\right]^{-1}f'_x(x,g(x))h$$

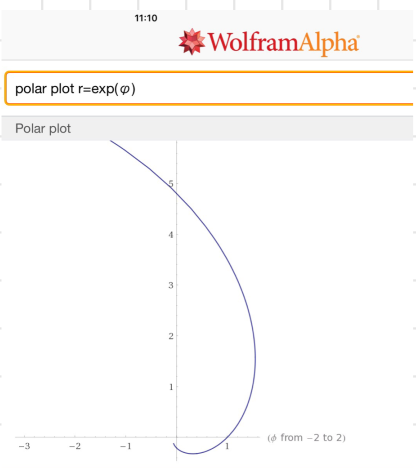
tzn $$g'(x)=-\left[f'_y(x,g(x))\right]^{-1}f'_x(x,g(x))$$ ■

TFU daje nam narzędzia dzięki którym możemy policzyć różne rzeczy na temat funkcji zadanej w sposób uwikłany nie znając samej funkcji

Weźmy np $f(x,y)=\log\sqrt{x^2+y^2}-\operatorname{arctg}(y/x)$ dla $x>0$

$f(x,y)=0$ oznacza $\log\sqrt{x^2+y^2}=\operatorname{arctg}(y/x)$

($r=\exp\varphi$ biegunowo $\varphi\in\ ]-\pi/2,\pi/2[$)



Sprawdzić że w otoczeniu $x_0=1$ równanie określa y jako funkcję x. Znaleźć y' i y'' w zależności od x,y

$\frac{1}{2}\log(x^2+y^2)$

$$f(x,y)=\log\sqrt{x^2+y^2}-\operatorname{arctg}\left(\frac{y}{x}\right)$$

$$f_y(x,y)=\frac{1}{\cancel{2}}\cdot\frac{1}{x^2+y^2}\cdot\cancel{2}y-\frac{1}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}\left(\frac{1}{x}\right)=$$

$$=\frac{y}{x^2+y^2}-\frac{x}{x^2+y^2}=\frac{x-y}{x^2+y^2}=0\ ?$$

$y=x \quad \frac{1}{2}\log(2x^2)=\frac{\pi}{4} \quad \log(2x^2)=\frac{\pi}{2} \quad 2x^2=\exp(\pi/2) \quad x^2=\frac{1}{2}\exp(\pi/2)$

$$x=\pm\cancel{\mp}\frac{1}{\sqrt{2}}\exp(\pi/4)$$

poza $x=\frac{1}{\sqrt{2}}\exp(\pi/4)=y$ f zadaje y jako funkcję od x ale nie wiemy ile tych funkcji jest. (z obrazka widać że dwie) Mimo to możemy policzyć pochodną:

$$\frac{1}{2}\log(x^2+y^2)=\operatorname{arctg}(y/x)$$

$$\frac{1}{\cancel{2}}\frac{1}{x^2+y^2}(\cancel{2}x+\cancel{2}y\,y_x)=\frac{1}{1+\frac{y^2}{x^2}}\left(-\frac{y}{x^2}+\frac{y_x}{x}\right)$$ ← wyznaczamy y_x

$$\frac{x}{x^2+y^2}+\frac{y}{x^2+y^2}y_x=\frac{-y}{x^2+y^2}+\frac{x y_x}{x^2+y^2} \qquad \frac{y-x}{x^2+y^2}y_x=-\frac{y+x}{y^2+x^2}$$

$$y_x=-\frac{y+x}{y-x}$$

na podstawie tego równania możemy sprawdzić czy te funkcje mają punkt krytycz-ny $y_x=0$ tzn $y=-x$, $\log\sqrt{x^2+(-x^2)}=\operatorname{arctg}\left(\frac{-x}{x}\right) \Rightarrow \log\sqrt{2x^2}=-\pi/4$

$\sqrt{2x^2}=\exp(-\pi/4) \quad x=\frac{1}{\sqrt{2}}\exp(-\pi/4)$. Wydaje się więc że „dolna" funkcja ma punkt krytyczny. Można też zbadać jego typ. Załóżmy ogólnie, że w otoczeniu (x_0,y_0) równanie $f(x,y)=0$ określa y jako funkcję x. Znajdźmy y'' (y_{xx})

$$f(x,y)=0 \quad f_x+f_y y_x=0 \rightarrow y_x=-\frac{1}{f_y}f_x$$

Niech x_1: $f_x(x_0,y_0)=0$ tzn x_0 jest punktem krytycznym y.

$$\downarrow$$

$$f_{xx}+f_{xy}y_x+f_{yx}y_x+f_{yy}y_x^2+f_y y_{xx}=0$$

$$y_{xx}=-\frac{1}{f_y}\left(f_{xx}+2f_{xy}y_x+f_{yy}y_x^2\right)$$ ← y_{xx} w otoczeniu x_0

y_x $=0$ w punkcie krytycznym

$$y_{xx}(x_0)=-\frac{1}{f_y(x_0,y_0)}f_{xx}(x_0,y_0)$$ ← y_{xx} w x_0.

W naszym przypadku

$$f(x,y) = \log\sqrt{x^2+y^2} - \operatorname{arctg}\left(\frac{y}{x}\right)$$

$$f_x = \cancel{\frac{1}{2}} \frac{1}{x^2+y^2} \cdot \cancel{2}x - \frac{1}{1+(y/x)^2}\left(-\frac{y}{x^2}\right) =$$

$$\frac{x}{x^2+y^2} - \frac{y}{x^2+y^2} = \frac{x+y}{x^2+y^2}$$

$$f_{xx} = \frac{(x^2+y^2) - 2x(x+y)}{(x^2+y^2)^2} = \frac{x^2+y^2-2x^2-2xy}{(x^2+y^2)^2} = \frac{y^2-x^2-2xy}{(x^2+y^2)^2}$$

$$y_{xx} = -\frac{1}{f_y} f_{xx} = -\frac{\cancel{x^2+y^2}}{x-y} \cdot \frac{y^2-x^2-2xy}{(x^2+y^2)^{\cancel{2}}} \underset{y=-x}{\overset{\uparrow}{=}} -\frac{x^2-x^2-2x^2}{2x(x^2+x^2)} = +\frac{2x^2}{4x^3} = +\frac{1}{2x} =$$

$$= \Big|_{x=\frac{1}{\sqrt{2}}\exp(-\pi/4)} + \frac{1\cdot\sqrt{2}}{2\cdot\exp(-\pi/4)} = +\frac{1}{\sqrt{2}}\exp(\pi/4) > 0$$ funkcja ma minimum.