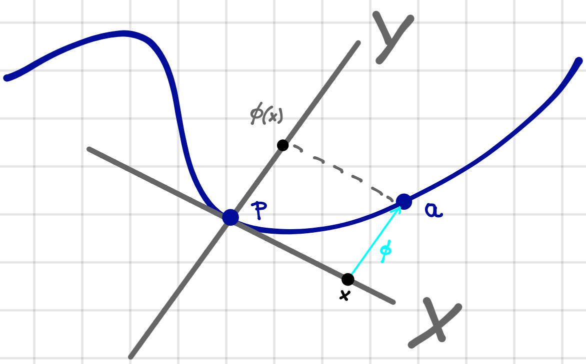
SEMESTR II WYKŁAD 7 POWIERZCHNIE, EKSTREMA ZWIĄZANE

Powierzchnią w przestrzeni afinicznej A nazywamy podzbiór, który lokalnie jest wykresem odwzorowania różniczkowalnego. Oto formalna definicja:

DEFINICJA: Niech A będzie przestrzenią afiniczną wymiaru n. Powierzchnią klasy C^k (gładką) M w A nazywamy podzbiór $M\subset A$ spełniający warunek: dla każdego $p\in M$ istnieje otwarte otoczenie $\mathcal{O}\subset A$, podprzestrzeń $X\subset V$ wymiaru m, podprzestrzeń dopełniającą $Y\subset V$: $V=X\oplus Y$ oraz odwzorowanie $\phi: X\supset \mathcal{U}\to Y$ klasy C^k (gładkie) takie, że

$$M\cap\mathcal{O}=\left\{a:\ a=p+x+\phi(x),\ x\in\mathcal{U}\right\}$$



W praktyce, jeśli chcemy pokazać że jakiś zbiór jest powierzchnią używamy jednego z dwóch twierdzeń. Najczęściej zbiór M zadany jest jako poziomica odwzorowania lub jako obraz odwzorowania:

TWIERDZENIE[1]: $F: A\longrightarrow \mathbb{R}^{n-m}$, $M=F^{-1}(\bar{0})$, $\bar{0}\in\mathbb{R}^{n-m}$. Jeśli w każdym punkcie $p\in M$ pochodna $F'(p)$ jest maksymalnego rzędu to M jest powierzchnią.

TWIERDZENIE[2]: $\kappa: \mathbb{R}^m\longrightarrow A$, $M=\kappa(\mathcal{U})$ $\mathcal{U}\subset\mathbb{R}^m$. Jeśli dla każdego $x\in\mathcal{U}$ $\kappa'(x)$ jest maksymalnego rzędu to M jest lokalnie powierzchnią, tzn dla każdego $x\in\mathcal{U}$ istnieje otoczenie $\mathcal{O}$ takie, że $\kappa(\mathcal{O})$ jest powierzchnią wymiaru m w A.

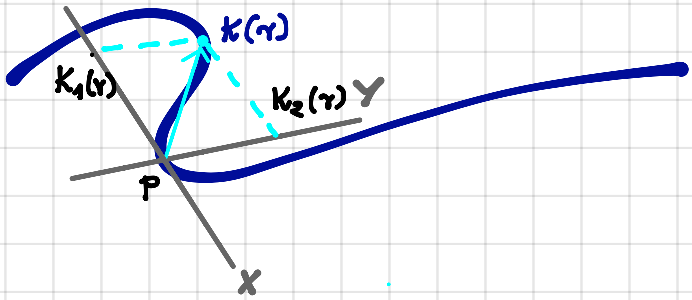
DOWÓD[1]: Jeśli $F'(p)$ ma rząd $n-m$ to istnieje podprzestrzeń $Y\subset V$ taka, że $F'(p)|_Y$ jest liniowym izomorfizmem Y i $\mathbb{R}^{n-m}$. Jako X możemy wziąć dowolną przestrzeń dopełniającą Y w V. Mamy wtedy $V=X\oplus Y$.

$\Phi: X\oplus Y\ni(x,y)\longmapsto F(p+x+y)\in\mathbb{R}^{n-m}$ spełnia w p warunki tw. o funkcji uwikłanej, tzn istnieje $\vartheta\times\mathcal{V}\subset X\oplus Y$, $\vartheta,\mathcal{V}$ są otoczeniami ϑ i $\varphi:\vartheta\to\mathcal{V}$ takie, że $\Phi(x,\varphi(x))=0=F(p+x+\varphi(x))$. Dla wystarczająco małych ϑ i $\mathcal{V}$ $y=\varphi(x)$ jest jedynym rozwiązaniem $\Phi(x,y)=0$ w $\mathcal{V}$. Mamy więc $M\cap(p+\vartheta\times\mathcal{V})=\{p+x+\varphi(x),\ x\in\vartheta\}$.

DOWÓD[2]: Załóżmy, że $\kappa(\bar{0})=p$ dla uproszczenia notacji. Oznaczmy $X=\operatorname{im}\kappa'(0)$, Y dowolna dopełniająca, tzn $V=X\oplus Y$. Weźmy P_X i P_Y rzuty związane z rozkładem $V=X\oplus Y$, tzn $P_X: V\to V$: $\ker P_X=V$ $\operatorname{im}P_X=X$, $P_Y: V\to V$ $\ker P_Y=X$ $\operatorname{im}P_Y=Y$ $P_X^2=P_X$, $P_Y^2=P_Y$ $P_X+P_Y=\mathbb{1}$

Zdefiniujmy też:

$\kappa_1: \mathbb{R}^m\longrightarrow X$ $\kappa_1(r)=P_X(\kappa(r)-p)$ $\kappa_2(r)=P_Y(\kappa(r)-p)$



$k(r) = p + k_1(r) + k_2(r)$

$$\underset{X}{k'(0)} = \underset{\Downarrow}{k_1'(0)} + \underset{\Downarrow}{k_2'(0)} \quad \tan \quad k'(0)h = k_1'(0)h + k_2'(0)h$$

X ≈ def. X Y

tan $k_2'(0) = 0$. $k_1'(0)$ jest maksymalnego rzędu, tan spełnia zał. tw. o lokalnej odwracalności. Istnieje więc otoczenie $\mathcal{U}$ punktu 0 w X takie że istnieje $k_1^{-1} : \mathcal{U} \to \mathbb{R}^m$

Definiujemy $\varphi : \mathcal{U} \to Y$ wzorem $\varphi(x) = k_2(k_1^{-1}(x))$. Obraz k jest lokalnie postaci $p + x + \varphi(x)$. Istotnie: $k(r)$ rzutuje się na $x = k_1(r)$ i $y = k_2(r)$, wtedy $r = k_1^{-1}(x)$

$$a = k(r) = p + k_1(r) + k_2(r) = p + x + \varphi(x)$$

Bardzo przydatne jest następujące twierdzenie:

TWIERDZENIE: $M \subset A$ jest gładką powierzchnią wymiaru m wtedy i tylko wtedy gdy dla każdego punktu $p \in M$ istnieje otoczenie $\mathcal{O}$ i układ współrzędnych $\phi : \mathcal{O} \to \mathbb{R}^n$ taki, że $M \cap \mathcal{O} = \{a : \varphi^{m+1}(a) = \dots = \varphi^n(a) = 0\}$

DOWÓD: $\Leftarrow$ Definiujemy $F : \mathcal{O} \to \mathbb{R}^{n-m}$ $F(a) = (\varphi^{m+1}(a), \dots, \varphi^n(a))$, $M \cap \mathcal{O} = F^{-1}(\bar{0})$, $\phi'(p)$ jest maksymalnego rzędu więc $F'(p)$ też. Dalej korzystamy z tw. 1.

$\Rightarrow$ Jeśli M jest powierzchnią to w otoczeniu p M jest postaci $p + x + \sigma(x)$ dla X, Y, σ jak w definicji. Bierzemy bazę $e = (e_1, \dots, e_m, e_{m+1} \dots e_n)$ dostosowaną do rozkładu $V = X \oplus Y$ $\varepsilon = (\varepsilon^1, \dots, \varepsilon^n)$ oznacza bazę dualną. Definiujemy współrzędne

$$\varphi^1(a) = \langle \varepsilon^1, a-p \rangle \qquad \varphi^{m+1}(a) = \langle \varepsilon^{m+1}, a - (p + P_x(p-a) + \sigma(P_x(p-a))\rangle = \langle \varepsilon^{m+1}, P_y(p-a) - \sigma(P_x(p-a))\rangle$$

$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$

$$\varphi^m(a) = \langle \varepsilon^m, a-p \rangle \qquad \varphi^n(a) = \langle \varepsilon^n, P_y(a-p) - \sigma(P_x(a-p))\rangle$$

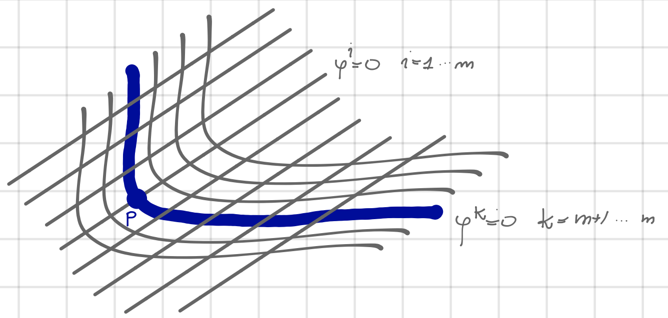
Zapiszmy $\phi'(a)$ w bazie e

↳ verte

$$[\phi'(p)]^{\text{kan.}}_e = \begin{array}{cc} \overbrace{\quad\quad\quad\quad}^{m} & \overbrace{\quad\quad\quad}^{n-m} \end{array}$$
$$\left[\begin{array}{ccccc|cccc} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & & & & \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & & & & \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & & 0 & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & & & & \\ \hline & & & & & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ & & * & & & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ & & & & & \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ & & & & & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] = \begin{bmatrix} 1\!\!1_m & 0 \\ * & 1\!\!1_{n-m} \end{bmatrix}$$

– macierz odwracalna

ϕ jest lokalnym układem współrzędnych w otoczeniu p.



$\varphi^1(a) = \langle \varepsilon^1, a-p \rangle$ $\qquad$ $\varphi^{m+1}(a) = \langle \varepsilon^{m+1}, a-(p+P_x(p-a)+\sigma(P_x(p-a))\rangle = \langle \varepsilon^{m+1}, P_y(p-a)-\sigma(P_x(p-a))\rangle$

$\vdots$ $\qquad\qquad$ $\vdots$

$\varphi^m(a) = \langle \varepsilon^m, a-p \rangle$ $\qquad$ $\varphi^n(a) = \langle \varepsilon^n, P_y(a-p)-\sigma(P_x(a-p))\rangle$

46a

Objaśnienie: jak liczymy $[\Phi'(p)]_e^{kan}$

Ogólnie rzecz biorąc macierz odwzorowania $T \in L(V,W)$ w bazach e w V i f w W tzn $[T]_e^f$ składa się z kolumn postaci $[Te_i]^f$. My musimy więc policzyć $\Phi'(p)e_i$. Ponieważ mamy do czynienia z pochodną to korzystamy ze wzoru

$$\Phi(p+h) = \Phi(p) + \Phi'(p)h + R(p,h). \quad \Phi \text{ jest zdefiniowane tak, że } \Phi(p) = 0 \in \mathbb{R}^n$$

Liczymy więc $\Phi(p+h) = (\varphi^1(p+h), \dots, \varphi^n(p+h))$ biorąc jako h kolejne e_i

$\Phi(p+e_i)$ $\quad i \in \{1 \dots m\}$

$$j \in \{1 \dots m\} \quad \varphi^j(p+e_i) = \langle \varepsilon^j, p+e_i-p \rangle = \langle \varepsilon^j, e_i \rangle = \delta^i_j$$

$$k \in \{m+1, \dots, n\} \quad \varphi^k(p+e_i) = \langle \varepsilon^k, P_y(p+e_i-p) - \sigma(P_x(p+e_i-p)\rangle =$$

$$= \langle \varepsilon^k, \underbrace{P_y(e_i)}_{=0} - \sigma(\underbrace{P_x(e_i)}_{=e_i})\rangle = \langle \varepsilon^k, -\sigma(P_x(e_i))\rangle \neq 0$$ przynajmniej dla pewnych par j, k

stąd bierze się $*$

$i \in \{m+1 \dots n\}$

$$j \in \{1 \dots m\} \quad \varphi^j(p+e_i) = \langle \varepsilon^j, p+e_i-e_i \rangle = \langle \varepsilon^j, e_i \rangle = 0$$

$$k \in \{m+1, \dots, n\} \quad \varphi^k(p+e_i) = \langle \varepsilon^k, P_y(p+e_i-p) - \sigma(P_x(p+e_i-p)) =$$

$$= \langle \varepsilon^k, \underbrace{P_y(e_i)}_{=e_i} - \sigma(\underbrace{P_x(e_i)}_{0})\rangle = \langle \varepsilon^k, e_i \rangle = \delta^k_i$$

$$[\Phi'(p)]_e^{kan} = \begin{bmatrix} \delta^j_i & 0 \\ * & \delta^k_i \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{c|c} \mathbb{1} & 0 \\ \hline * & \mathbb{1} \end{array}\right]$$

WEKTORY STYCZNE DO POWIERZCHNI Zdefiniowaliśmy już wektory styczne do krzywych w A. Stwierdziliśmy, że wektory styczne do krzywych przechodzących przez punkt $a \in A$ tworzą przestrzeń wektorową kanonicznie izomorficzną z V. Wprowadziliśmy oznaczenie $T_a A$. Powiedzieliśmy że z każdym układem współrzędnych ϕ w zbiorze otwartym θ wiąże się w punktach $a \in \theta$ baza przestrzeni stycznej $T_a A$ złożona z wektorów stycznych do krzywych współrzędnościowych. Teraz zastanowimy się co dzieje się na powierzchni.

DEFINICJA: Niech M będzie powierzchnią w A. Ustalmy $p \in M$. Wektor $v \in T_p A$ jest styczny do M jeśli istnieje $\gamma: I \to M$ taka, że $v = \dot\gamma(0)$, tzn v jest styczny do pewnej krzywej w M. Podzbiór $T_p A$ wektorów stycznych do M w p oznaczamy $T_p M$

Wiadomo zatem, że $T_p M \subset T_p A \simeq V$. Okazuje się, że nie jest to byle jaki podzbiór:

STWIERDZENIE: Jeśli $\dim M = m$ to $T_p M$ jest m-wymiarową podprzestrzenią w V.

DOWÓD: Skorzystamy z odpowiedniego układu współrzędnych. Niech więc θ będzie otoczeniem p w A i ϕ układem współrzędnych takim, że dla $a \in M \cap \theta$ $\varphi^{m+1}(a) = \dots = \varphi^n(a) = 0$. Jeśli γ jest krzywą w M to $\varphi^{m+1}(\gamma(t)) = \dots = \varphi^n(\gamma(t)) = 0$, zatem $\dot\gamma(0)$ wyraża się w bazie $\frac{\partial}{\partial\varphi^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial\varphi^m}$ jedynie poprzez pierwsze m-wektorów. Ogólnie

$$\dot\gamma(0) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \varphi^1(\gamma(t))\frac{\partial}{\partial\varphi^1} + \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \varphi^2(\gamma(t))\frac{\partial}{\partial\varphi^2} + \dots + \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \varphi^m(\gamma(t))\frac{\partial}{\partial\varphi^m} + \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \varphi^{m+1}(\gamma(t))\frac{\partial}{\partial\varphi^{m+1}} + \dots + \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \varphi^n(\gamma(t))\frac{\partial}{\partial\varphi^n}$$

funkcje stałe równe 0 więc pochodne też 0

zatem $\dot\gamma(0) \in \left\langle \frac{\partial}{\partial\varphi^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial\varphi^m} \right\rangle$

Z drugiej strony dla $v = \lambda^1 \frac{\partial}{\partial\varphi^1} + \dots + \lambda^m \frac{\partial}{\partial\varphi^m}$ znaleźć można krzywą

$\gamma_v(t) = \phi^{-1}\left(\varphi^1(p) + \lambda^1 t, \dots, \varphi^m(p) + \lambda^m t, 0, \dots, 0\right)$ w M taką, że $\dot\gamma_v(0) = v$, zatem

$T_p M = \left\langle \frac{\partial}{\partial\varphi^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial\varphi^m} \right\rangle$ – m-wymiarowa podprzestrzeń w V. ∎

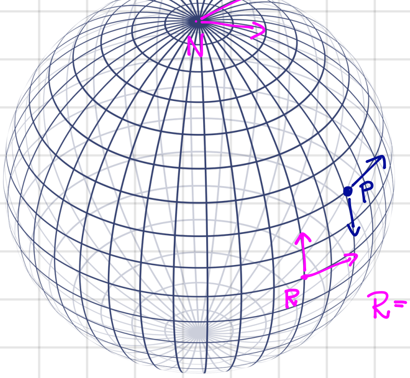
Zauważmy, że w każdym punkcie powierzchni ta podprzestrzeń jest zazwyczaj inna: Weźmy $A = \mathbb{R}^3$, $M = S^2$. Wtedy $V = \mathbb{R}^3$. Rozpatrujemy $T_a S^2$ dla różnych punktów

$a = N$ – biegun północny $(0,0,1)$

$a = P$ – gdzieś po środku $(\sqrt{6}/4, \sqrt{2}/4, \sqrt{2}/4)$

$a = R$ – na równiku $(1,0,0)$

$T_N S^2 = \left\langle \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y} \right\rangle$



$P = \left(\frac{\sqrt{6}}{4}, \frac{\sqrt{2}}{4}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

$T_P S^2 = \left\langle -\frac{\sqrt{2}}{4}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\sqrt{6}}{4}\frac{\partial}{\partial y}, \frac{\sqrt{6}}{4}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\sqrt{2}}{4}\frac{\partial}{\partial y} - \frac{\sqrt{2}}{2}\frac{\partial}{\partial z} \right\rangle$

$R = (1,0,0)$ $T_R S^2 = \left\langle \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right\rangle$

$T_N S^2, T_P S^2, T_R S^2$ są dwuwymiarowymi przestrzeniami w $\mathbb{R}^3$ ale różnymi. W szczególności nie ma między nimi kanonicznego izomorfizmu. Jest kanoniczny izomorfizm $T_N \mathbb{R}^3 \simeq T_P \mathbb{R}^3 \simeq T_R \mathbb{R}^3$

jednak nie obcina się on do podprzestrzeni. $\longrightarrow$ krzywizna (!) Jak znajdować T_pM ?

STWIERDZENIE: Niech $F: A \to \mathbb{R}^{n-m}$ spełnia warunki Twierdzenia 1, tzn $M = F^{-1}(0)$ jest m-wymiarową powierzchnią. Wówczas dla $p \in M$ $\quad T_pM = \ker F'(p)$

DOWÓD: Jeśli $\gamma: I \to M$ jest krzywą różniczkowalną, taką że $\gamma(0) = p$ to $F \circ \gamma: I \to \mathbb{R}^{n-m}$ jest odwzorowaniem stałym równym 0. Zatem $(F\circ\gamma)'(0) = 0$. Mamy

$(F\circ\gamma)'(0) = F'(\gamma(0))\cdot\dot\gamma(0) = F'(p)\dot\gamma(0)$ tzn $\dot\gamma(0) \in \ker F'(p)$ Otrzymaliśmy więc, że

$T_pM \subset \ker F'(p)$ z rachunku wymiarów wynika, że $T_pM = \ker F'(p)$ ∎

STWIERDZENIE: Niech $\kappa: \mathbb{R}^m \supset \mathcal{U} \to A$ spełnia warunki Twierdzenia 2 i niech $\kappa(\mathcal{U})$ będzie powierzchnią. Wówczas dla $x \in \mathcal{U}$ $\quad \operatorname{im} \kappa'(x) = T_{\kappa(x)}M$

DOWÓD: Niech $v \in \mathbb{R}^m$. Krzywa $t \longmapsto \kappa(x + tv)$ jest krzywą w M. Wektor styczny do tej krzywej to $\kappa'(x)v \in \operatorname{im} \kappa'(x)$. Rachunek wymiarów daje równość ∎

EKSTREMA FUNKCJI NA POWIERZCHNI

Niech $f: M \to \mathbb{R}$ będzie funkcją. Definicja ekstremum jest taka jak zawsze. Mówimy, że $p \in M$ jest maksimum (minimum) lokalnym f jeśli istnieje otoczenie $\mathcal{O}$ punktu p w A takie że dla $x \in \mathcal{O}\cap M$ $\quad f(x) \leq f(p)$ $\quad (f(x) \geq f(p))$. Zazwyczaj f zdefiniowane jest na A, a nas interesuje ekstremum na M jedynie. Jeśli M zadane jest parametryzacją κ to badamy $f\circ\kappa: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ jak zwykle. Jeśli jednak $M = F^{-1}(0)$ to stosujemy metodę Lagrange'a:

TWIERDZENIE: Niech $F: A \supset \mathcal{O} \longrightarrow \mathbb{R}^{n-m}$ będzie różniczkowalne, $\operatorname{rk} F'(x) = n-m$ dla $x \in \mathcal{O}$, $M = F^{-1}(0)$. Niech także $f: A \supset \mathcal{U} \to \mathbb{R}$, $M \subset \mathcal{U}$ będzie różniczkowalne. Jeśli $p \in M$ jest ekstremum f na M to istnieje liniowy funkcjonał $\Lambda: \mathbb{R}^{n-m} \longrightarrow \mathbb{R}$ taki, że $\quad f'(p) = \Lambda \circ F'(p)$

DOWÓD:

Załóżmy, że $\kappa: \Omega \longrightarrow A$ jest parametryzacją M w otoczeniu p, $\kappa(0) = p$. Jeśli p jest lokalnym ekstremum f na M to 0 jest lokalnym ekstremum $f\circ\kappa$, tzn $(f\circ\kappa)'(0) = 0$.

Mamy więc $\forall h \in \mathbb{R}^m \; (f\circ\kappa)'(0)h = 0 = f'(\underset{p}{\kappa(0)})\underbrace{\kappa'(0)h}_{\text{dowolny element z } \operatorname{im}\kappa'(0) = T_pM}$

Warunkiem koniecznym istnienia ekstremum jest więc $\quad f'(p)\big|_{T_pM} = 0$.

$f'(p) \in L(V, \mathbb{R}) = V^*$

Warunek $f'(p)\big|_{T_pM} = 0$ inaczej zapisujemy $\quad f'(p) \in (T_pM)^\circ$

anihilator podprzestrzeni

$\{\alpha \in V^* : \forall v \in T_pM \; \langle \alpha, v\rangle = 0\}$ $\quad \dim (T_pM)^\circ = n-m$.

$T_pM = \ker F'(p) \qquad F'(p) \in L(V, \mathbb{R}^{n-m})$ tzn $F'(p) = \begin{bmatrix} \alpha^1 \\ \vdots \\ \alpha^{n-m}\end{bmatrix}$ każdy z α^i jest liniowym

funkcjonałem na V, tzn elementem V^*. Ponadto każdy α^i znika na T_pM tzn $\langle \alpha^1, \dots, \alpha^{n-m} \rangle \subset (T_pM)^0$. Skoro rk $F'(p) = n-m$ to $\alpha^1 \dots \alpha^{n-m}$ są liniowo niezależne i $\langle \alpha^1, \dots, \alpha^{n-m} \rangle = (T_pM)^0$. W tej sytuacji $f'(p)$ jako element $(T_pM)^0$ jest liniową kombinację α^i, tzn

$$f'(p) = \lambda_1 \alpha^1 + \dots + \lambda_{n-m} \alpha^{n-m} = [\lambda_1 \dots \lambda_{n-m}] \begin{bmatrix} \alpha^1 \\ \vdots \\ \alpha^{n-m} \end{bmatrix} = \underbrace{[\lambda_1 \dots \lambda_{n-m}]}_{\in L(\mathbb{R}^{n-m}, \mathbb{R})} F'(p)$$

■

Mamy warunek konieczny istnienia ekstremum $f'(p) = \Lambda \circ F'(p)$. Pora na warunek dostateczny. Często można go uzyskać badając drugą pochodną. Gdybyśmy użyli parametryzacji oznaczałoby to badanie formy $(f \circ \kappa)''(0)(\cdot, \cdot) : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}$

Wyliczmy więc $(f \circ \kappa)''(\bar{0})(h, k)$ dla $h, k \in \mathbb{R}^m$. Mamy różniczkować dwa razy. Najpierw różniczkujemy raz w punkcie $y \in \mathcal{O} \leftarrow$ otoczenie $0 \in \mathbb{R}^m$

$(f \circ \kappa)'(y)h = f'(\kappa(y))\kappa'(y)h$ Teraz różniczkujemy po y w punkcie 0. Zmienna y jest w dwóch miejscach

$$(f \circ \kappa)''(0)(h,k) = f''(\kappa(\bar{0}))(\underbrace{\kappa'(0)h}_{v}, \underbrace{\kappa'(0)k}_{w}) + f'(\kappa(0))\kappa''(0)(h,k) =$$

$$= \underbrace{f''(p)(v, w)}_{} + f'(p)\kappa''(0)(h,k) \leftarrow$$ to nie wiadomo co jest

to jest wyrażone przez obiekty na M niezależnie od parametryzacji

Załóżmy że $M = F^{-1}(0)$ Wtedy $F(\kappa(y)) = 0$ Wszystkie pochodne $F \circ \kappa$ są zero:

$0 = F'(\kappa(y))\kappa'(y)h$, $0 = F''(\kappa(y))(\kappa'(y)h, \kappa'(y)k) + F'(\kappa(y))\kappa''(y)(h,k)$ dla $y = 0 \in \mathbb{R}^m$ mamy

$$0 = F''(p)(v, w) + F'(p)\kappa''(y)(h,k)$$

$$\Downarrow$$

$$\Lambda \circ / \quad F'(p)\kappa''(y)(h,k) = -F''(p)(v,w)$$

$$\underbrace{\Lambda \circ F'(p)}_{f'(p) \text{ zgodnie z tw. Lagrange'a}}\kappa''(y)(h,k) = -\Lambda \circ F''(p)(v,w)$$

$$(f \circ \kappa)''(0)(h,k) = f''(p)(v,w) - \Lambda F''(p)(v,w)$$

Zamiast badać sygnaturę $(f \circ \kappa)''(0)$ badamy sygnaturę $f''(p) - \Lambda \circ F''(p)$ w obcięciu do T_pM.

PRZYKŁADY RACHUNKOWE W „LEKTURZE UZUPEŁNIAJĄCEJ"