SEMESTR II WYKŁAD 8 RÓWNANIA RÓŻNICZKOWE

Termin równanie różniczkowe oznacza zazwyczaj równanie w którym niewiadomą jest odwzorowanie i w równaniu tym pojawiają się pochodne tego odwzorowania. Ze względu na możliwość dowodzenia różnych twierdzeń rozróżnia się równania różniczkowe zwyczajne i równania różniczkowe cząstkowe.

ODE — Ordinary Differential Equations

Są to równania na odwzorowania których dziedziną jest $\mathbb{R}$ lub odcinki w $\mathbb{R}$. Wartości mogą być w $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^n$, przestrzeni wektorowej lub afinicznej wymiaru skończonego, w przestrzeni Banacha, na powierzchni...

PDE — Partial Differential Equations

Są to równania na jedną lub wiele funkcji n zmiennych, tzn. na odwzorowania $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$. Zazwyczaj wartości są w $\mathbb{R}^m$, ale mogą też być w bardziej skomplikowanych przestrzeniach.

PRZYKŁADY: Pojawiające się w fizyce przykłady to

1. Równanie falowe na $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$$

Ogólne rozwiązanie jest postaci $f(t,x) = \varphi(x+vt) + \psi(x-vt)$ gdzie φ, ψ są dowolnymi funkcjami jednej zmiennej różniczkowalnymi przynajmniej dwa razy.

2. Równanie Schrödingera, fundamentalne w mechanice kwantowej

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = \left(-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta + V\right)\psi$$

jest to równanie różniczkowe cząstkowe na $\psi: \mathbb{R}^4 \ni (t,x,y,z) \longmapsto \psi(t,x,y,z) \in \mathbb{C}$

...

Zwyczajne równania różniczkowe też często wynikają z fizycznych problemów:

PRZYKŁADY: 1. Przyjmując odpowiednie idealizacje uważamy, że liczba atomów pierwiastka promieniotwórczego w próbce spełnia równanie

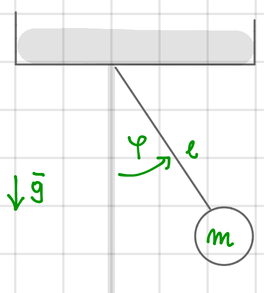
$\frac{dN}{dt} = -\lambda N$ gdzie $t \mapsto N(t)$ opisuje liczbę atomów w czasie t. Łatwo stwierdzić, że $N(t) = A\exp(-\lambda t)$ gdzie $A = N(0)$ ma interpretację liczby atomów w czasie $t=0$.

2. Wahadło matematyczne opisane jest równaniem

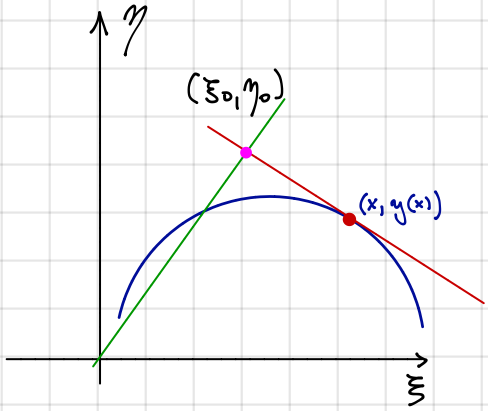
$$\ddot{\varphi} = -\frac{g}{\ell}\sin\varphi.$$

Zwyczajowo $\ddot{\varphi}$ oznacza $\frac{d^2\varphi}{dt^2}$. Dla małych wychyleń przyjmujemy $\sin\varphi \approx \varphi$ otrzymując równanie oscylatora harmonicznego:

$$\ddot{\varphi} = -\frac{g}{\ell}\varphi \quad \text{i.e.} \quad \ddot{\varphi} + \frac{g}{\ell}\varphi = 0$$



3. Przykłady równań różniczkowych pochodzić mogą także z geometrii: Znaleźć funkcję $x \mapsto y(x)$ dla $x>0, y>0$ spełniającą warunek: odstęp stycznej do wykresu w punkcie $(x, y(x))$ od punktu $(0,0)$ jest równy x.



Równanie stycznej: $\eta = y'(x)\,\xi + b$, b wyznaczamy z warunku $(x, y(x))$ należy do stycznej:

$$b = y(x) - y'(x)\cdot x$$

$$\eta = y'(x)\,\xi + y(x) - y'(x)\,x$$

$$\eta = y'(x)(\xi - x) + y(x)$$

Prosta prostopadła do stycznej i przechodząca przez (0,0) to $\eta = -\frac{1}{y'(x)}\,\xi$

Punkt wspólny spełnia oba równania

$$\begin{aligned} \eta_0 &= y'(x)(\xi_0 - x) + y(x) \\ \eta_0 &= -\frac{1}{y'(x)}\,\xi_0 \end{aligned} \Rightarrow \quad y'\xi_0 - y'x + y = -\frac{1}{y'}\,\xi_0 \qquad \xi_0\left(y' + \frac{1}{y'}\right) = y'x - y$$

$$\xi_0\,\frac{(y')^2 + 1}{y'} = y'x - y$$

$$\xi_0 = \frac{y'(y'x - y)}{1 + (y')^2} \qquad \eta_0 = -\,\frac{y'x - y}{1 + (y')^2}$$

Odstęp stycznej od (0,0) to odległość (ξ_0, η_0) od (0,0). Warunek ma więc postać

$$\frac{[y'(y'x - y)]^2 + [y'x - y]^2}{[1 + (y')^2]^2} = x^2 \qquad \text{Porządkujemy:}$$

$$\frac{[\cancel{(y')^2 + 1}][y'x - y]^2}{[1 + (y')^2]^{\cancel{2}}} = x^2 \qquad [y'x - y]^2 = [1 + (y')^2]x^2 \qquad \cancel{(y')^2x^2} - 2yy'x + y^2 = x^2 + \cancel{(y')^2x^2}$$

$$y^2 - x^2 - 2yy'x = 0 \qquad y' = \frac{y^2 - x^2}{2yx}$$

Równanie w postaci uwikłanej

równanie w postaci kanonicznej

W ramach tego wykładu zajmować się będziemy równaniami różniczkowymi zwyczajnymi pierwszego i wyższych rzędów.

rząd równania to najwyższy rząd pochodnej występujący w równaniu.

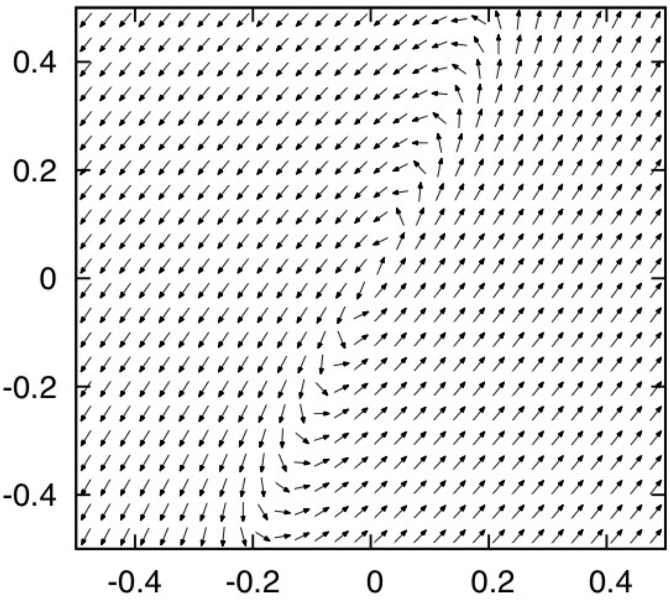
Równanie różniczkowe zwyczajne można zinterpretować geometrycznie. Przyjrzyjmy się najpierw równaniu na krzywą w $\mathbb{R}^2$ $t \longmapsto (x(t), y(t))$ postaci

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = 2x(t) - y(t) \\ \dot{y}(t) = 3x(t) - y(t) \end{cases}$$

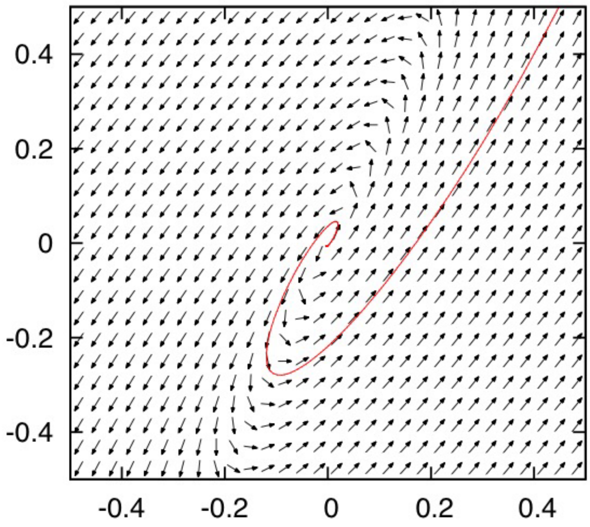
Rozwiązaniem jest krzywa w $\mathbb{R}^2$, której wektor styczny ma określone przez równanie współrzędne. Używając poprzedniej notacji w punkcie (x,y) wektor ten ma współrzędne

$$(2x - y)\frac{\partial}{\partial x} + (3x - y)\frac{\partial}{\partial y}.$$

Równanie określa więc pole wektorowe $(x,y) \longmapsto (2x-y)\frac{\partial}{\partial x} + (3x-y)\frac{\partial}{\partial y}$



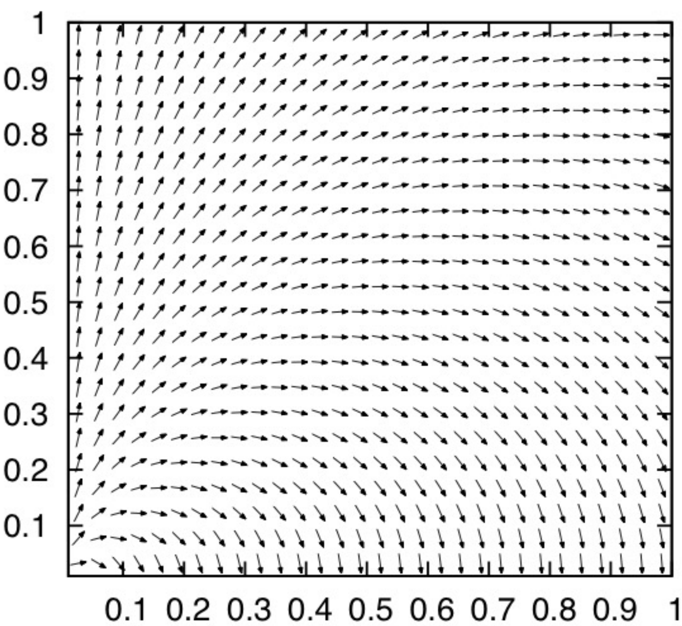
jedno z rozwiązań.

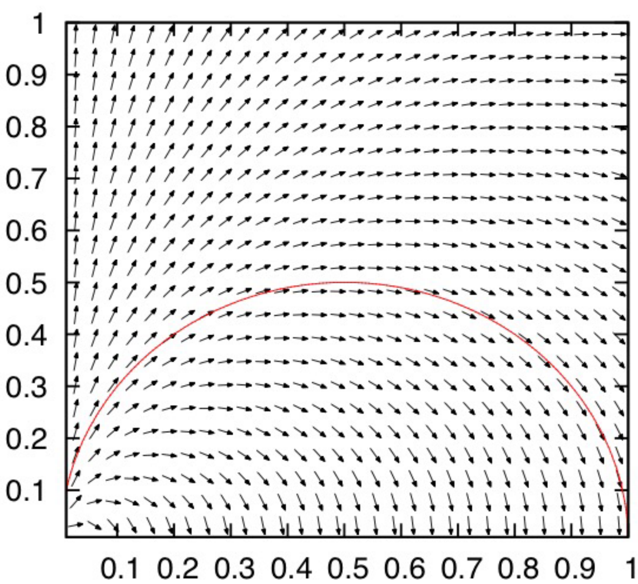


Powyższy przykład jest szczególny w tym sensie, że w równaniu nie występuje explicite zmienna niezależna t. W naszym geometrycznym przykładzie zmienna niezależna x pojawia się w równaniu:

$\frac{dy}{dx} = \frac{y^2-x^2}{2xy}$ Nie jest to więc zwykłe pole wektorowe. Można wtedy postąpić na dwa sposoby – rozważać tzw. nieautonomiczne pole wektorowe albo rozszerzyć przestrzeń o zmienną niezależną dodając trywialne równanie.

Zamiast równania na funkcję $x \mapsto y(x)$ rozważamy układ równań na krzywą $t \mapsto (x(t), y(t))$ $\quad \dot{x} = 1 \quad \dot{y} = \frac{y^2-x^2}{2xy}$





Żeby skończyć z przykładami rozwiążmy zadanie ze rysunku:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y^2-x^2}{2xy} = \frac{x^2\left((y/x)^2-1\right)}{2xy} = \frac{(y/x)^2-1}{2(y/x)}$$

jest to tzw. równanie jednorodne. Rozwiązujemy zamieniając zmienne $z(x) = \frac{y(x)}{x}$ tzn $z(x)\cdot x = y(x)$

$$\frac{dy}{dx} = z + \frac{dz}{dx}\cdot x$$

$$z + \frac{dz}{dx}\cdot x = \frac{z^2-1}{2z} \qquad \frac{dz}{dx}\cdot x = \frac{z^2-1}{2z} - z = -\frac{1+z^2}{2z}$$

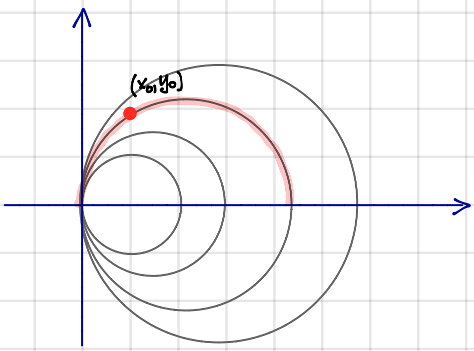
$$\frac{2z\,dz}{1+z^2} = -\frac{dx}{x} \qquad \log(1+z^2) = -\log|x| + \log D = \log\frac{D}{|x|}$$

$x>0$: $\quad 1+z^2 = \frac{D}{x} \qquad 1+\frac{y^2}{x^2} = \frac{D}{x} \qquad x^2+y^2 = Dx$

$$\left(x-\frac{D}{2}\right)^2 + y^2 = \left(\frac{D}{2}\right)^2$$

Rozwiązaniem jest górna część okręgu o środku w $(D/2, 0)$ i promieniu $D/2$

Otrzymaliśmy rodzinę rozwiązań parametryzowanych jednym dodatnim parametrem. Przez każdy punkt pierwszej ćwiartki układu współrzędnych przechodzi dokładnie jedno rozwiązanie. Jest tu ciekawy punkt $(0,0)$, formalnie nie należący do obszaru zainteresowania gdzie przecinają się wszystkie rozwiązania.



Ustalając tzw **warunek początkowy**, tzn deklarując wartość funkcji w punkcie x_0 (np $x_0 = 1$, $y(x_0) = 2$) wybieramy jedno konkretne rozwiązanie.

$x^2+y^2 = Dx$: $\quad 1^2 + 2^2 = D = 5 \quad$ Rozwiązanie $\left(x-\frac{5}{2}\right)^2 + y^2 = \frac{25}{4}$

DEFINICJA: Równanie różniczkowe zwyczajne $\dot{x} = F(t,x)$ wraz z warunkami początkowymi $x(t_0) = x_0$ nazywamy **zagadnieniem Cauchy'ego**

Podstawowym twierdzeniem w teorii ODE jest poniższe **TWIERDZENIE O ISTNIENIU i JEDNOZNACZNOŚCI ROZWIĄZANIA ZAGADNIENIA CAUCHY'EGO**

X – przestrzeń Banacha, $\vartheta \subset X$ otwarty $I =]a,b[\subset \mathbb{R}$ $\quad F: I\times\vartheta \longrightarrow X$, $t_0 \in I$, $x_0 \in \vartheta$

Jeśli F jest ciągła i spełnia warunek Lipschitza względem drugiej zmiennej ze stałą $L>0$ to istnieje $\varepsilon>0$ taki, że $]t_0-\varepsilon, t_0+\varepsilon[\subset I$ oraz jedyna funkcja $x:]t_0-\varepsilon, t_0+\varepsilon[\longrightarrow \vartheta$ spełniająca $\quad \forall t \in]t_0-\varepsilon, t_0+\varepsilon[\quad \dot{x}(t) = F(t,x) \quad x(t_0) = x_0$

$\exists L>0: \forall t \in I \ \forall u,w \in \vartheta \quad \| F(t,u) - F(t,w) \| \leq L\,\|u-w\|$ ← warunek Lipschitza

↑ nie zależy od t.

SZKIC DOWODU: (*) $\dot{x} = F(x,t)$, $x(t_0) = x_0$

Załóżmy, że x spełnia (*) wówczas $x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} \dot{x}(s)ds = x_0 + \int_{t_0}^{t} F(s,x(s))\,ds$ (**)

Zagadnienie Cauchy'ego (*) i równanie całkowe (**) są sobie równoważne. Rozwiązanie (**) konstruujemy metodą kolejnych przybliżeń:

$$\varphi_0(t) = x_0$$
$$\varphi_1(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} F(s,\varphi_0(s))\,ds$$
$$\vdots$$
$$\varphi_n(s) = x_0 + \int_{t_0}^{t} F(s,\varphi_{n-1}(s))\,ds$$

Dalej należy wykazać, że $\lim_{n\to\infty} \varphi_n = \varphi$ i zbieżność jest jednostajna. Wtedy

$$\varphi(t) = \lim_{n\to\infty} \varphi_n(t) = x_0 + \lim_{n\to\infty} \int_{t_0}^{t} F(s,\varphi_{n-1}(s))ds = x_0 + \int_{t_0}^{t} F(s,\varphi(s))ds$$

są oczywiście trudności (1) całka z funkcji o wartościach wektorowych, (2) czy φ_n jest zbieżny (3) czy φ_n jest jednostajnie zbieżny ...

PRZYKŁAD Metodę j.w. można użyć w praktyce: weźmy zagadnienie Cauchy'ego $\dot{x}(t) = x(t)$, $x(0) = \alpha$ dla $x: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

$\varphi(0) = \alpha$, $\varphi_1(t) = \alpha + \int_0^t \alpha\,ds = \alpha + \alpha t$ $\quad \varphi_2(t) = \alpha + \int_0^t (\alpha + \alpha s)ds = \alpha + \alpha t + \frac{1}{2}\alpha t^2$ ... $\varphi_n(t) = \sum_{k=0}^{n} \alpha \frac{1}{k!} t^k$

$x(t) = \lim_{n\to\infty} \varphi_n(t) = \alpha \exp(t)$ $\square$

Rozwiążmy najpierw pierwszy problem formalny: całka z funkcji o wartościach wektorowych: $F: I \times \mathcal{O} \to X$ ma wartości w przestrzeni Banacha. Musimy wiedzieć co to jest $\int_{t_0}^{t} F(s,x(s))ds$ tzn. obliczyć całkę z ciągłej funkcji $f: [a,b] \to X$. W przestrzeni skończonego wymiaru jest łatwo:

Niech $e = (e_1, \dots, e_n)$ będzie bazą w X. Zapisujemy $f(t) = f^1(t)e_1 + \dots + f^n(t)e_n$ i definiujemy $\int_a^b f(t)dt = [\int_a^b f^1(t)dt]e_1 + \dots + [\int_a^b f^n(t)dt]e_n$. Pokazujemy następnie, że wyrażenie to jest niezależne od wyboru bazy. Jeśli bowiem weźmiemy inną bazę $g = (g_1, \dots, g_n)$ związaną nieosobliwą macierzą z bazą e mamy:

$$e_i = \Lambda^j_i g_j \quad f(t) = f^i(t)e_i = f^i(t)\Lambda^j_i g_j = \underbrace{(f^i(t)\Lambda^j_i)}_{\tilde{f}^j(t)} g_j = \tilde{f}^j(t) g_j$$

$$\left[\int_a^b \tilde{f}^j(t)dt\right]g_j = \left[\int_a^b f^i(t)\Lambda^j_i dt\right]g_j = \left[\int_a^b f^i(t)dt\right]\underbrace{\Lambda^j_i g_j}_{e_i} = \left[\int_a^b f^i(t)dt\right]e_i$$

macierz stała, niezależna od t

Wynik nie zależy od wybranej bazy, zatem całka jest dobrze określona. Zauważmy, że można tu elegancko użyć pojęcia bazy dualnej.

Jeśli ε jest bazą dualną do e to $f^i(t) = \langle \varepsilon^i, f(t)\rangle$ $f^i(t)e_i = \langle \varepsilon^i, f(t)\rangle e_i$. Możemy więc zapisać

$$\left\langle \varepsilon^i, \int_a^b f(t)dt \right\rangle = \int_a^b f^i(t)dt$$

W nieskończenie wymiarowej przestrzeni nie mamy bazy i bazy dualnej w zwykłym sensie ale mamy twierdzenie

TWIERDZENIE X – p. Banacha, $f : [a,b] \longrightarrow X$ ciągła. Istnieje dokładnie jeden element $y \in X$ taki, że dla dowolnego funkcjonału liniowego ciągłego φ na X zachodzi

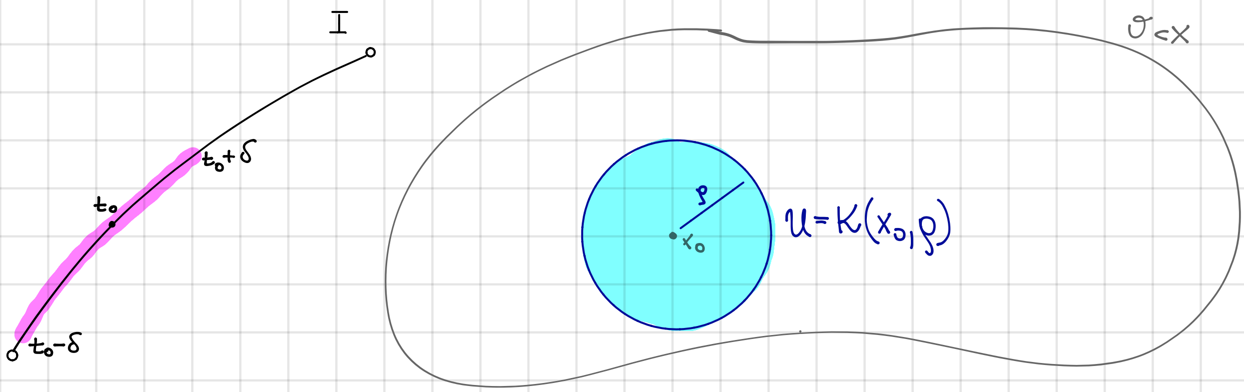
$$\langle \varphi, y\rangle = \int_a^b \langle \varphi, f(t)\rangle dt.$$

Wektor y możemy nazwać całką z f po $[a,b]$ $y = \int_a^b f(t)dt$.

Alternatywnie całkę z funkcji o wartościach wektorowych zdefiniować można używając pojęcia sum wypunktowanych (por. definicja całki Riemanna). Twierdzenie zostawiamy bez dowodu, konstrukcji nie wykonujemy.

DOWÓD TWIERDZENIA: Zagadnienie Cauchy'ego (*) równoważne jest równaniu (**)

$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^t F(s, x(s))ds$, które można rozumieć jako równanie na punkt stały odwzorowania $\Phi : x \longmapsto \Phi(x)(t) := x_0 + \int_{t_0}^t F(s, x(s))ds$ żeby jednak to działało musimy odpowiednio określić przestrzeń funkcyjną na której Φ działa, a właściwie wewnątrz której Φ działa. Z samego wzoru nie wynika bowiem, że jeśli $x : I \longrightarrow \vartheta$ ma wartości w ϑ i $F : I \times \vartheta \longrightarrow X$ to $\Phi(x)$ także ma wartości w ϑ. Nie wystarczy więc użyć $C(I, \vartheta)$. Ponadto takie podejście ma wartość dowodową jeśli Φ jest zbliżające a przestrzeń na której działa jest przestrzenią metryczną zupełną.



$F : I \times \vartheta \longrightarrow X$

W pierwszym ruchu wybieramy $\delta > 0$ tak aby $[t_0 - \delta, t_0 + \delta] \subset I$ oraz ρ tak aby $K(x_0, \rho) \subset \vartheta$. Odcinek $]t_0 - \delta, t_0 + \delta[$ oznaczamy J a kulę $\mathcal{U}$. Zdefiniujmy teraz liczbę D wzorem

$$D = \sup_{\substack{s \in \bar{J} \\ v \in \bar{\mathcal{U}}}} \|F(s,v)\|$$

Uzasadnienie wymaga, że D jest liczbą skończoną. Jeśli X byłoby skończenie wymiarowe to wystarczyłby argument o funkcji ciągłej na zbiorze zwartym: $\bar{J} \times \bar{U}$ byłby zwarty a $(s,v) \longmapsto \|F(s,v)\|$ ciągła. Kresy takiej funkcji są osiągane w zbiorze zwartym w szczególności są skończone. W nieskończonym wymiarze $\bar{U}$ nie musi być zwarty, potrzebujemy więc innego argumentu:

$$\|F(s,v)-F(t_0,x_0)\| \leqslant \|F(s,v)-F(s,x_0)\| + \|F(s,x_0)-F(t_0,x_0)\| \leqslant L\underbrace{\|v-x_0\|}_{\leqslant \rho} +$$

$$+\|F(s,x_0)\| + \|F(t_0,x_0)\| \leqslant L\rho + \sup_{v\in \bar{J}}\|F(s,x_0)\| + \|t_0,x_0\| < \infty$$

stałe

tu działa argument o f. ciągłej na zb. zwartym bo $\bar{J}$ jest zwarty

Bierzemy teraz $\varepsilon>0$ takie żeby $H=[t_0-\varepsilon, t_0+\varepsilon]\subset \bar{J}$, $\varepsilon < \frac{\lambda}{L}$ ($\lambda<1$), $\varepsilon < \rho/D$

to potrzebne żeby Φ było zbliżające

to potrzebne, żeby Φ działało wewnątrz przestrzeni

Jako dziedzinę Φ bierzemy $\boxed{Z_H = C(H,\bar{U})}$

(1)

Z_H jest domkniętym zbiorem przestrzeni Banacha $C(H,X)$ z normą supremum. Dokładniej $Z_H = \bar{K}(\gamma_0,\rho)$ promień U

stała krzywa $\gamma_0(s)=x_0$

(2)

Czy $\Phi(Z_H)\subset Z_H$? Weźmy $x\in Z_H$ i policzmy $\|\Phi(x)-x_0\| = \sup_{t\in H}\|\int_{t_0}^{t} F(s,x(s))\,ds\| \leqslant$

$$\leqslant \sup_{t\in H}|t-t_0| \sup_{\substack{s\in H\\ v\in \bar{U}}}\|F(s,v)\| \leqslant \varepsilon\cdot D \leqslant \frac{\rho}{D}\cdot D \leqslant \rho \quad \text{O.K}$$

(3)

Czy Φ jest zbliżające?

$$\|\Phi(\gamma_1)(t)-\Phi(\gamma_2)(t)\| = \left\|\int_{t_0}^{t}\{F(s,\gamma_1(s))-F(s,\gamma_2(s))\}ds\right\| \leqslant \int_{t_0}^{t}\|F(s,\gamma_1(s))-F(s,\gamma_2(s))\|ds$$

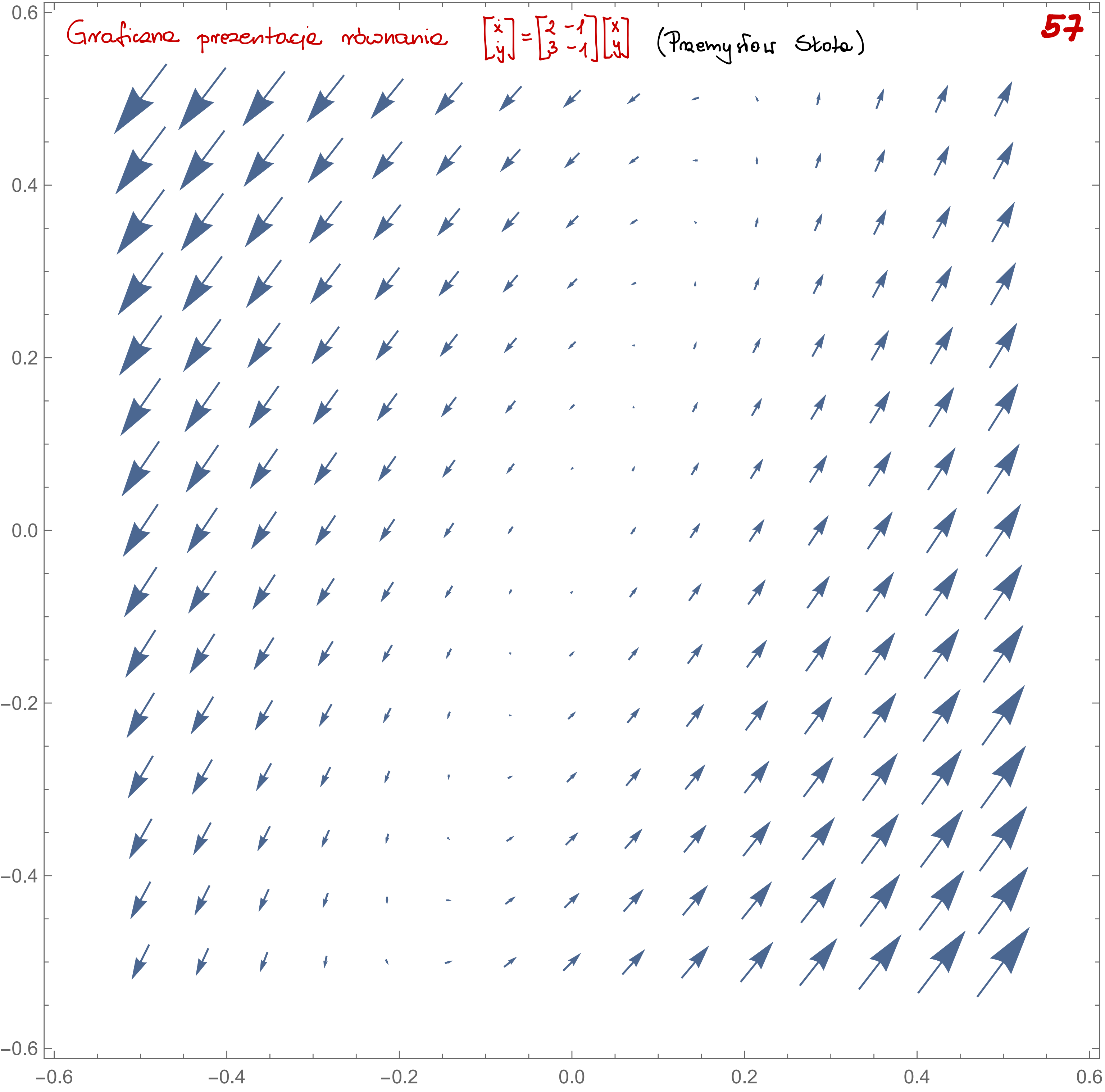
$$\leqslant L\int_{t_0}^{t}\|\gamma_1(s)-\gamma_2(s)\|ds \leqslant L\cdot\varepsilon\cdot\sup_{s\in H}\|\gamma_1(s)-\gamma_2(s)\| < \lambda\|\gamma_1-\gamma_2\|.$$

$$\|\Phi(\gamma_1)-\Phi(\gamma_2)\| \leqslant \lambda\|\gamma_1-\gamma_2\|$$

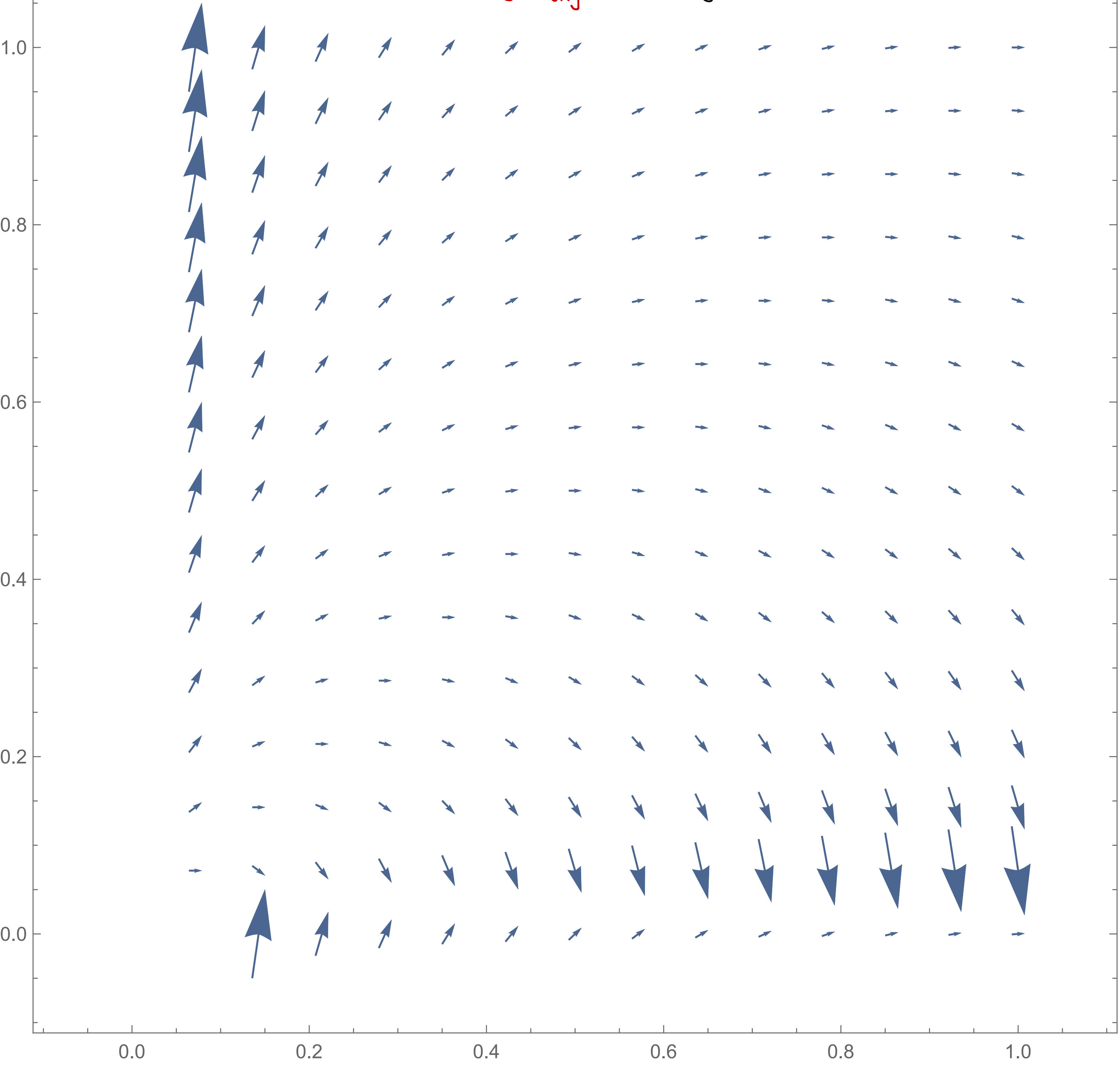
Z zasady Banacha wynika, że Φ ma dokładnie jeden punkt stały i że można go otrzymać (patrz dowód zasady Banacha) metodą kolejnych przybliżeń. Ten punkt stały to krzywa $x: [t_0-\varepsilon, t_0+\varepsilon] \longrightarrow U\subset \mathcal{O}\subset X$ $x(t_0)=x_0$

Z konstrukcji wiemy, że x jest ciągła. Jednak skoro spełnia $x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t}F(s,x(s))\,ds$ to jest też różniczkowalna (ciągła funkcja podcałkowa) ∎

Graficzne prezentacje równania $\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ (Przemysław Stoła)



Graficzna prezentacja równania $\dot{y} = \frac{y^2 - x^2}{2xy}$ (Przemysław Stoła) **58**



UWAGI RÓŻNE:

(1) Z lokalnej jednoznaczności rozwiązania na $]t_0-\varepsilon, t_0+\varepsilon[$ wynika globalna jednoznaczność. Istotnie, weźmy $t_1 \in]t_0-\varepsilon, t_0+\varepsilon[$ i postawmy problem Cauchy'ego dla t_1 i $x(t_1)=x_1$. Rozważając to zagadnienie dostaniemy rozwiązanie określone na $]t_1-\varepsilon', t_1+\varepsilon_1[$, które na przecięciu odcinków musi być zgodne z wyjściowym! W ten sposób rozwiązanie można przedłużać, choć nie zawsze na całe I. Na przykład weźmy równanie

$$\dot{x} = x^2 \qquad x(0)=1$$

$$\frac{dx}{dt} = x^2 \longrightarrow \frac{dx}{x^2} = dt \qquad -\frac{1}{x} = t + C \qquad x = -\frac{1}{t+C} \qquad x(0) = -\frac{1}{C} = 1 \qquad C=-1$$

$$x(t) = -\frac{1}{t-1} = \frac{1}{1-t}$$ rozwiązanie jest określone na $]-\infty, 1[$ i nie da się przedłużyć na $]-\infty, \alpha[$, $\alpha>1$.

(2) Zbadamy zależność rozwiązania od warunków początkowych i od F, tzn interesuje nas jak bardzo zmieni się rozwiązanie jeśli odrobinę przesuniemy x_0 lub nieco zmienimy F. Ten drugi problem jest istotny z punktu widzenia problemów rozwiązywanych perturbacyjnie, tzn mamy trudne równanie, zamiast tego rozwiązujemy łatwiejsze ale podobne i interesuje nas jak bardzo rozwiązanie różni się od prawdziwego.

Weźmy dwa równania dane przez F_1 i F_2 oraz dane początkowe x_1 i x_2 w t_0. Weźmy też rozwiązania f i g na wspólnym odcinku $[t_0-\varepsilon, t_0+\varepsilon]$. f i g są punktami stałymi Φ_1 i Φ_2. Punkty te można uzyskać jako granice $f_n = \Phi_1^n(f_0)$, $g_n = \Phi_2^n(g_0)$ dla dowolnych f_0 i g_0.

$$\|f_1(t)-g_1(t)\| \leq \|x_1-x_2\| + \int_{t_0}^{t} \|F_1(s,f_0) - F_2(s,g_0)\| ds \leq$$

$$\|x_1-x_2\| + \int_{t_0}^{t} \|F_1(s,f_0)-F_1(s,g_0)\| + \|F_1(s,g_0) - F_2(s,g_0)\| ds \leq$$

$$\|x_1-x_2\| + |t-t_0| L_1 \|f_0-g_0\| + |t-t_0| \|F_1-F_2\|$$

$$\|f_2(t)-g_2(t)\| \leq \|x_1-x_2\| + \int_{t_0}^{t} \|F_1(s,f_1(s)) - F_1(s,g_1(s))\| + \|F_1(s,g_1) - F_2(s,g_1)\| ds$$

$$\leq \|x_1-x_2\| + \int_{t_0}^{t} L_1 \|f_1(s)-g_1(s)\| ds + |t-t_0| \|F_1-F_2\|$$

$$\|f_2(t)-g_2(t)\| \leq \|x_1-x_2\| + \int_{t_0}^{t} \|F_1(s,f_1(s)) - F_1(s,g_1(s))\| + \|F_1(s,g_1) - F_2(s,g_1)\| \, ds$$

60

$$\leq \|x_1-x_2\| + \int_{t_0}^{t} L_1 \|f_1(s)-g_1(s)\| ds + |t-t_0| \|F_1-F_2\|$$

$$\leq \|x_1-x_2\| + \int_{t_0}^{t} L_1 \Big(\underline{\|x_1-x_2\| + |s-t_0| L_1 \|f_0-g_0\| + |s-t_0| \|F_1-F_2\|} \Big) ds +$$

$$\|t-t_0\| \|F_1-F_2\| = \|x_1-x_2\| \left\{ 1 + L_1 |t-t_0| \right\} + L_1^2 \frac{1}{2}(t-t_0)^2 \|f_0-g_0\| + \|F_1-F_2\| \times \Big\{$$

$$|t-t_0| + \frac{1}{2}|t-t_0|^2 \Big\}$$

⋮ itd

$$\|f_n(t)-g_n(t)\| \leq \|x_1-x_2\| \left(1 + L_1|t-t_0| + \dots + \frac{1}{n!} L_1^n |t-t_0|^n\right) + \frac{L_1^n}{n!} |t-t_0|^n \|f_0-g_0\|$$

$$+ \left(\|t-t_0\| + \dots + \frac{1}{n!}|t-t_0|^n \right) \|F_1-F_2\| \leq$$

$$\leq \|x_1-x_2\| \exp\left(L_1|t_0-t|\right) + \frac{L_1^n |t-t_0|^n}{n!} \|f_0-g_0\| + \|F_1-F_2\| \times$$

$$\times \left[\exp\left(|t-t_0|\right) - 1 \right]$$

$$\Big\downarrow n \to \infty$$

$$\|f(t)-g(t)\| \leq \|x_1-x_2\| \exp\left(L|t-t_0|\right) + \|F_1-F_2\| \left[\exp\left(|t-t_0|\right)-1\right]$$

$$\Big\downarrow \sup_{t \in [t_0-\varepsilon, t_0+\varepsilon]}$$

$$\|f-g\| \leq \|x_1-x_2\| \exp(L_1\varepsilon) + \|F_1-F_2\| \left[\exp(\varepsilon)-1\right]$$

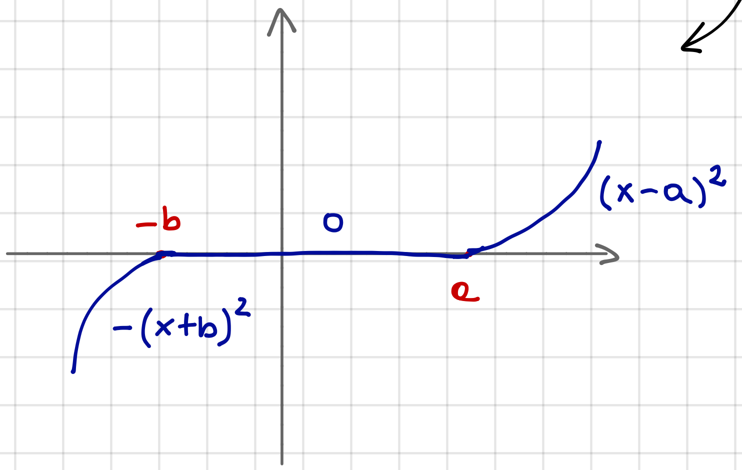
const   const

Niedużą zmianą w. pocz. powoduje „niedużą" zmianę rozwiązania. Podobnie niedużą zmianą F.

„Niedużość" tej zmiany jest oczywiście względne - wykładniczo rośnie z parametrem. W każdym razie zależność od warunków początkowych i od F jest ciągła.

PRZYKŁAD:

Rozważmy $\dot{x} = 2\sqrt{|x|}$ $\quad x(0)=0$ Prawa strona nie spełnia warunku Lipschitza w otoczeniu 0, więc twierdzenie nie ma zastosowania, jednak rozwiązania istnieją – tracimy jedynie jednoznaczność: Weźmy $a,b>0$ i $x_{ab}: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$



PRZYKŁAD $X=\mathbb{R}$ Jedyne równanie, poza liniowymi..., które rzeczywiście potrafimy rozwiązywać to równanie o zmiennych rozdzielonych:

$$\dot{x} = f(x)g(t) \qquad \frac{dx}{dt} = f(x)g(t) \qquad \frac{dx}{f(x)} = g(t)\,dt$$

niech F będzie pierwotna do $\frac{1}{f}$ i G pierwotna do g. Rozwiązanie jest zadane w sposób uwikłany równaniem

$$F(x) = G(t) + C$$

stała

Stałą dobieramy w zależności od w. początkowych.