Rozważamy równanie różniczkowe postaci $\dot{x}(t) = A(t)x(t) + b(t)$ gdzie $A: I \to B(X)$, $b: I \to X$ tzn $F: I \times X \to X$ jest szczególnej postaci $F(t,x) = A(t)x(t) + b(t)$. Jeśli $b(t) = 0$ równanie nazywamy jednorodnym (RJ), jeśli $b(t) \neq 0$ niejednorodnym (RN). Zakładamy że A i b są odwzorowaniami ciągłymi.

Badamy równanie liniowe pod kątem tw. Cauchy'ego:

$\|F(t,x) - F(t,y)\| = \|A(t)x - A(t)y\| \leq \|A(t)\| \|x-y\|$ dla $t \in [\alpha,\beta] \subset I$ mamy

$$\|F(t,x) - F(t,y)\| \leq \underbrace{\sup_{t\in[\alpha,\beta]} \|A(t)\|}_{L} \|x-y\|$$

Zgodnie z tw Cauchy'ego dla dowolnego x_0, dla $t_0 \in [\alpha,\beta]$ istnieje rozwiązanie problemu Cauchy'ego jednoznaczne na $]t_0-\varepsilon, t_0+\varepsilon[\subset [\alpha,\beta]$ gdzie $\varepsilon < 1/L$ i $\varepsilon < \varrho/D$. Weźmy $\varrho = L\|x_0\| + B$ dla $B = \sup_{t\in[\alpha,\beta]} \|b(t)\|$

$D = \sup_{\substack{\|x-x_0\|<\varrho \\ s\in[\alpha,\beta]}} \|A(s)x + b(s)\|$ W takim przypadku dobre będzie $\varepsilon = \frac{1}{L+1}$

istotnie: $\varepsilon \cdot L = \frac{L}{L+1} < \lambda < 1 \Rightarrow \varepsilon < \frac{\lambda}{L}$

$$D = \sup_{\substack{s\in[\alpha,\beta] \\ \|x-x_0\|<\varrho}} \|A(s)x + b(s)\| \leq \sup_{\substack{s\in[\alpha,\beta] \\ \|x-x_0\|<\varrho}} \left(\|A(s)\|\|x\| + \|b(s)\| \right) \leq L(\|x_0\| + \varrho) + B$$

$$\frac{\varrho}{D} \geq \frac{L\|x_0\|+B}{L(\|x_0\|+\varrho)+B} = \frac{L\|x_0\|+B}{L(\|x_0\| + L\|x_0\| + B) + B} = \frac{\cancel{L\|x_0\|+B}}{(L+1)(\cancel{L\|x_0\|+B})} = \frac{1}{L+1} = \varepsilon \Rightarrow \varepsilon \leq \frac{\varrho}{D}$$

Zauważmy że ε zależy jedynie od L (a L od odcinka $[\alpha,\beta]$ i od A) a nie zależy od t_0 i x_0. Wobec tego rozwiązanie $t \mapsto x(t)$ dopasujące na $]t_0-\varepsilon, t_0+\varepsilon[$ można przedłużać biorąc to samo ε i nowe warunki początkowe wewnątrz $]t_0-\varepsilon, t_0+\varepsilon[$. W ten sposób możemy przedłużyć rozwiązanie na całe $]\alpha,\beta[$. Przedział $[\alpha,\beta]$ był dowolny zawarty w I. Wybierając różne przedziały zawarte w I i korzystając z jednoznaczności na przecięciach możemy rozszerzyć rozwiązanie na całe I.

Własności rozwiązań:

(1) Niech x,y będą rozwiązaniami RJ. Wtedy $\alpha x + \beta y$ także jest rozwiązaniem równania jednorodnego:

$\dot{x} = A(t)x$
$\dot{y} = A(t)y$

$$\frac{d}{dt}(\alpha x + \beta y) = \alpha\dot{x} + \beta\dot{y} = \alpha A(t)x + \beta A(t)y = A(t)(\alpha x + \beta y)$$

Rozwiązania RJ tworzą przestrzeń wektorową.

(2) Niech x,y będą rozwiązaniami RN. Wtedy $x-y$ jest rozwiązaniem RJ:

$\dot{x} = A(t)x + b$
$\dot{y} = A(t)y + b$

$\dot{x} - \dot{y} = A(x-y)$

Rozwiązania RN tworzą przestrzeń afiniczną modelowaną na przestrzeni rozwiązań RJ, stąd

RORN = RSRN + RORJ

Rozwiązanie Ogólne Równania Niejednorodnego

R... Ogólne R... J...

Rozwiązanie Szczególne R... N...

jakieś, "jedno, dowolne, którekolwiek"

(3) Rozważmy teraz zależność od warunków początkowych: dla ustalonego t_0 warunek $x(t_0)=x_0$ wyznacza jednoznacznie rozwiązanie. Istnieje zatem bijekcja między elementami X (warunki początkowe) a zbiorem rozwiązań. Wiadomo ponadto, że kombinacji liniowej warunków początkowych odpowiada kombinacja liniowa rozwiązań, tzn. ta bijekcja jest liniowa. Zbiór rozwiązań jest więc podprzestrzenią wektorową w $C^1(I,X)$ bijektywną z X. W szczególności, jeśli $\dim X<\infty$ to także przestrzeń rozwiązań jest wymiaru skończonego równego $\dim X$.

RÓWNANIE JEDNORODNE:

Skoro dla ustalonego t_0 i x_0 rozwiązanie $x: I \to X$ takie że $x(t_0)=x_0$ jest jednoznacznie wyznaczone to można zdefiniować odwzorowanie

$$X\times I\times I \ni (x_0,t_0,t) \longmapsto x(t)\in X.$$ Zależność od x_0 jest liniowa, zatem istnieje

$$R(t,t_0): X\to X \text{ liniowe i takie że } R(t,t_0)x_0 = x(t)$$

REZOLWENTA

Znajomość rezolwenty oznacza znajomość RORJ – wystarczy zaaplikować do x_0 i dostajemy rozwiązanie zagadnienia Cauchy'ego

STWIERDZENIE: Własności rezolwenty

(1) $R(t,t_0)$ jest liniowe, (2) $R(t_0,t_0)=1\!\!1_X$, (3) $R(t,s)R(s,t_0)=R(t,t_0)$ (4) $R(t,t_0)\in B(X)$

(5) $I\ni t\longmapsto R(t,t_0)\in B(X)$ jest różniczkowalną krzywą spełniającą

$$\frac{d}{dt}R(t,t_0)=A(t)R(t,t_0)$$

DOWÓD (1),(2),(3) oczywiste (4) i (5) dowodzimy:

Wiadomo że $A(t)\in B(X)$. Rozważmy równanie liniowe na krzywą w $B(X)$ $r: I\to B(X)$

$$\dot r = A(t)\cdot r \qquad r(t_0)=1\!\!1_X$$

Jest to zagadnienie Cauchy'ego liniowe w $B(X)$. Ma więc jednoznaczne rozwiązanie. Biorąc $x_0\in X$ definiujemy krzywą $t\longmapsto x(t)=r(t)x_0\in X$. Sprawdzamy że $x(t)$ spełnia wyjściowe równanie z warunkiem $x(t_0)=x_0$:

$$\frac{d}{dt}x(t)=\frac{d}{dt}r(t)x_0=A(t)r(t)x_0=A(t)x(t) \qquad x(t_0)=r(t_0)x_0=1\!\!1_X x_0=x_0.$$

Z definicji $x(t)=R(t,t_0)x_0=r(t)x_0$ zachodzi to dla dowolnego $x_0\in X$, zatem $r(t)=R(t,t_0)$. Pokazuje to (4) oraz (5).

Problem rozwiązywania $\dot x = A(t)x$ można zastąpić problemem $\dot r(t)=A(t)r$ w $B(X)$. Różnica niby nie taka duża, ale równanie w $B(X)$ łatwiej jest zbadać. Można użyć metody kolejnych przybliżeń jak w dowodzie Cauchy'ego:

$$r_0(t)=1\!\!1_X \qquad r_1(t)=1\!\!1_X+\int_{t_0}^{t}A(s)1\!\!1_X\,ds \qquad r_2(t)=1\!\!1_X+\int_{t_0}^{t}A(s)r_1(s)\,ds = 1\!\!1_X+\int_{t_0}^{t}A(s_1)\Big(1\!\!1_X+\int_{t_0}^{s_1}A(s_2)1\!\!1_X\,ds_2\Big)ds_1 =$$

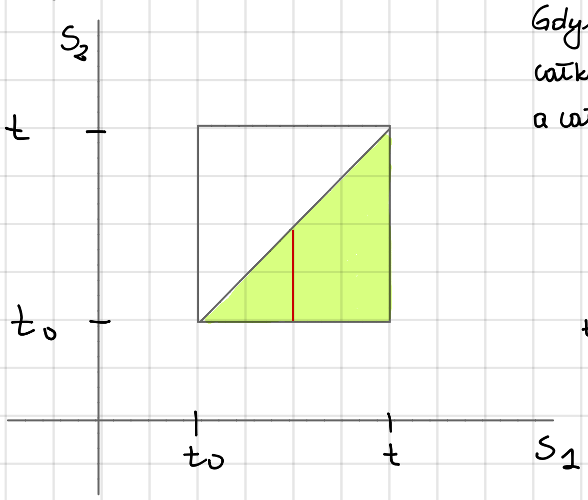
$$=1\!\!1_X+\int_{t_0}^{t}A(s_1)\,ds_1+\int_{t_0}^{t}\int_{t_0}^{s_1}A(s_1)A(s_2)\,ds_2\,ds_1$$

...

$$x_3(t)=1\!\!1_X+\int_{t_0}^{t}A(s)ds+\int_{t_0}^{t}\int_{t_0}^{s_1}A(s_1)A(s_2)ds_2ds_1+\int_{t_0}^{t}\int_{t_0}^{s_1}\int_{t_0}^{s_2}A(s_1)A(s_2)A(s_3)ds_3ds_2ds_1$$

$$x_n=1\!\!1_X+\sum_{k=1}^{n}\int_{t_0}^{t}\int_{t_0}^{s_1}\cdots\int_{t_0}^{s_{k-1}}A(s_1)A(s_2)\cdots A(s_k)ds_k ds_{k-1}\cdots ds_1=1\!\!1_X+\sum_{k=1}^{n}A_k(t)$$

Przyjrzyjmy się wyrazowi sumy dla $k=2$ $\int_{t_0}^{t}\int_{t_0}^{s_1}A(s_1)A(s_2)ds_2ds_1$ jest to całka iterowana, którą można rozumieć jak całkę po trójkącie (podwójną)



Gdyby $A(s_1)$ i $A(s_2)$ były przemienne dla wszystkich s_1, s_2 całkę po trójkącie można by zamienić na pół całki po kwadracie a całkę po kwadracie na kwadrat całki po odcinku:

$$\int_{t_0}^{t}\int_{t_0}^{s_1}A(s_1)A(s_2)ds_2ds_1=\frac{1}{2}\int_{t_0}^{t}\int_{t_0}^{t}A(s_1)A(s_2)ds_2ds_1=\frac{1}{2}\left(\int_{t_0}^{t}A(s)ds\right)^2$$

ogólnie

$$A_k(t)=\int_{t_0}^{t}\int_{t_0}^{s_1}\cdots\int_{t_0}^{s_{k-1}}A(s_1)A(s_2)\cdots A(s_k)ds_kds_{k-1}\cdots ds_1=\frac{1}{k!}\left(\int_{t_0}^{t}A(s)ds\right)^k$$

$$R(t,t_0)=1+\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k!}\left(\int_{t_0}^{t}A(s)ds\right)^n=:\exp\left(\int_{t_0}^{t}A(s)ds\right)$$

dla $A(s)$ przemiennych.

WAŻNY PRZYKŁAD: Jeśli $A(t)=A$, tzn $A(t)$ nie zależy od t

$$\int_{t_0}^{t}A\,ds=A(t-t_0)\qquad A_k(t)=\frac{1}{k!}A^k(t-t_0)^k\qquad R(t,t_0)=\exp(A(t-t_0))$$

Rozwiązanie zagadnienia Cauchy'ego dla równania liniowego o stałych współczynnikach, tzn ze stałym A ma postać

$$\boxed{x(t)=\exp(A(t-t_0))x_0}$$

dla $\dim X<\infty$ te rzeczy należy umieć liczyć!

WROŃSKIAN Załóżmy teraz, że $\dim X=n<\infty$ i wybierzmy bazę $e=(e_1,\dots,e_n)$ w X. Wiemy także, że przestrzeń rozwiązań jest izomorficzna X, tzn można wybrać bazę $x_1(\cdot)\dots x_n(\cdot)$ w przestrzeni rozwiązań. Każda krzywa $x_i(t)$ może być przedstawiona w bazie e:

$$x_i(t)=x_i^1(t)e_1+x_i^2(t)e_2+\dots+x_i^n(t)\qquad [x_i(t)]^e=\begin{bmatrix}x_i^1(t)\\ x_i^2(t)\\ \vdots\\ x_i^n(t)\end{bmatrix}$$

Z kolumn $[x_i(t)]^e$ tworzymy macierz

$$\begin{bmatrix} x_1^1(t) & x_2^1(t) & \cdots & x_n^1(t) \\ x_1^2(t) & x_2^2(t) & & x_n^2(t) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1^n(t) & x_2^n(t) & & x_n^n(t) \end{bmatrix}$$

Wyznacznik $W(t) = \det \begin{bmatrix} x_1^1(t) & x_2^1(t) & \cdots & x_n^1(t) \\ x_1^2(t) & x_2^2(t) & & x_n^2(t) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1^n(t) & x_2^n(t) & & x_n^n(t) \end{bmatrix}$ nazywa się Wrońskianem równania $\dot{x}(t) = A(t)x(t)$

Wypiszemy teraz pewne wzory, które przydadzą się później:

$x_i(t) = R(t,t_0)x_i(t_0)$ w bazie $[x_i(t)]^e = [R(t,t_0)]^e_e[x_i(t_0)]^e$ dla wszystkich i, zatem

$$\begin{bmatrix} x_1^1(t) & x_2^1(t) & \cdots & x_n^1(t) \\ x_1^2(t) & x_2^2(t) & & x_n^2(t) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1^n(t) & x_2^n(t) & & x_n^n(t) \end{bmatrix} = [R(t,t_0)]^e_e \begin{bmatrix} x_1^1(t) & x_2^1(t) & \cdots & x_n^1(t) \\ x_1^2(t) & x_2^2(t) & & x_n^2(t) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1^n(t) & x_2^n(t) & & x_n^n(t) \end{bmatrix}$$

$$\Downarrow$$

$$\det R(t,t_0) = W(t)W(t_0)^{-1}$$

co to jest?

Oznaczmy wyrazy macierzowe $R(t,t_0)$ przez $\rho^i_j(t)$. Równanie na $R(t,t_0)$ przyjmuje postać:

$$\frac{d}{dt}\rho^i_j(t) = \sum_k a^i_k(t)\rho^k_j(t)$$

Policzmy $\frac{d}{dt}\det[R(t,t_0)]^e_e = \frac{d}{dt}\sum_{\sigma\in S_n} \operatorname{sgn}\sigma\, \rho^1_{\sigma(1)}(t)\rho^2_{\sigma(2)}(t)\cdots\rho^n_{\sigma(n)}(t) =$

$$= \sum_{\sigma\in S_n}\operatorname{sgn}\sigma \sum_{k=1}^n \rho^1_{\sigma(1)}\cdots\rho^n_{\sigma(n)}\frac{d}{dt}\rho^k_{\sigma(k)} = \; = \sum_{ij}\left(\frac{d}{dt}\rho^i_j\right)B^j_i =$$

porządkujemy według $\frac{d}{dt}\rho^i_j$

wstawiamy z równania

dopełnienie algebraiczne wyrazu ρ^i_j

$$= \sum_{ij} B^j_i \sum_k a^i_k\rho^k_j = \sum_{ijk} B^j_i a^i_k \rho^k_j =$$

$$= \sum_{ik}\underbrace{\left[\sum_j B^j_i\rho^k_j\right]}_{\det R(t,t_0)\,\delta^k_i} a^i_k = \sum_{ik}\det R(t,t_0)\,\delta^k_i a^i_k = \det R(t,t_0)\operatorname{tr}A$$

$$\frac{d}{dt}\det R(t,t_0) = \operatorname{tr}A(t)\det R(t,t_0) \longleftarrow$$ równanie na $\det R(t,t_0)$ jest liniowe w jednym wymiarze

$\dot{f} = q(t)f \quad \frac{df}{dt} = q(t)f \quad \frac{df}{f} = q(t)dt \quad \log|f| = \int_{t_0}^t q(s)ds + C$

$f(t) = D\exp\left(\int_{t_0}^t q(s)ds\right)$ u nas $f(t) = \det R(t,t_0)$

$q(t) = \operatorname{tr}A(t)$

$f(t_0) = 1$

WZÓR LIOUVILLE'A

$$\det R(t,t_0) = W(t)W(t_0)^{-1} = \exp\int_{t_0}^t \operatorname{tr}A(s)ds$$

RÓWNANIA NIEJEDNORODNE

Rozważamy $\dot{x} = A(t)x + b(t)$. Wiemy, że RORN = RSRN + RORJ

zakładamy, że to już umiemy

tego szukamy

Najszybciej jest zgadnąć jakieś RSRN. Czasami się jednak nie da, wtedy stosujemy metodę wspomaganego zgadywania zwaną metodą uzmienniania stałych. Załóżmy że znamy RORJ, czyli rezolwentę $R(t,t_0)$. Wówczas RORJ możemy zapisać jako

$$X(t) = R(t,t_0)\,C \qquad C \in X \text{ dowolne (warunki początkowe)}$$

RSRN przewidujemy w postaci

$x(t) = R(t,t_0)\,C(t)$. Wstawiamy do równania:

$$\frac{d}{dt}x(t) = A(t)x(t) + b(t)$$

$$\frac{d}{dt}\big(R(t,t_0)\,C(t)\big) = A(t)R(t,t_0)\,C(t) + b(t)$$

$$\left(\frac{d}{dt}R(t,t_0)\right)C(t) + R(t,t_0)\frac{d}{dt}C(t) = A(t)R(t,t_0)\,C(t) + b(t)$$

upraszcza się ze względu na równanie rezolwenty

$$R(t,t_0)\frac{d}{dt}C(t) = b(t) \qquad \frac{d}{dt}C(t) = \big(R(t,t_0)\big)^{-1}b(t)$$

to należy rozwiązać, tzn znaleźć $\int_{t_0}^{t} R(s,t_0)^{-1}\,b(s)\,ds$

PRZYKŁAD:

$$\begin{bmatrix}\dot{x}\\ \dot{y}\end{bmatrix} = \overbrace{\begin{bmatrix}3 & -1\\ 1 & 1\end{bmatrix}}^{=A}\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}t\\ 1\end{bmatrix}$$

Szukamy najpierw rezolwenty przyjmując $t_0 = 0$: $R(t,0) = \exp(At)$

$$\det\begin{bmatrix}3-\lambda & -1\\ 1 & 1-\lambda\end{bmatrix} = (3-\lambda)(1-\lambda)+1 = 3-4\lambda+\lambda^2+1 = (\lambda-2)^2$$ Podwójna wartość własna

$$e^{At} = a\cdot A + b \qquad e^{\lambda t} = a\lambda + b \qquad \begin{cases} e^{2t} = 2a + b\\ te^{2t} = a\end{cases} \qquad b = e^{2t} - 2te^{2t}$$

$$e^{At} = te^{2t}\begin{bmatrix}3 & -1\\ 1 & 1\end{bmatrix} + (1-2t)e^{2t}\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}3te^{2t} + e^{2t} - 2te^{2t} & -te^{2t}\\ te^{2t} & te^{2t} + e^{2t} - 2te^{2t}\end{bmatrix} =$$

$$= e^{2t}\begin{bmatrix}t+1 & -t\\ t & 1-t\end{bmatrix}$$

RORJ $\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix} = e^{At}\begin{bmatrix}C_1\\ C_2\end{bmatrix}$, uzmienniamy : RSRN $\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix} = e^{At}\begin{bmatrix}C_1(t)\\ C_2(t)\end{bmatrix}$

$$\frac{d}{dt}\left(e^{At}\begin{bmatrix}C_1\\ C_2\end{bmatrix}\right) = A\cdot e^{At}\begin{bmatrix}C_1\\ C_2\end{bmatrix} + b \qquad \cancel{Ae^{At}\begin{bmatrix}C_1\\ C_2\end{bmatrix}} + e^{At}\begin{bmatrix}\dot{C}_1\\ \dot{C}_2\end{bmatrix} = \cancel{Ae^{At}\begin{bmatrix}C_1\\ C_2\end{bmatrix}} + b \qquad e^{At}\begin{bmatrix}\dot{C}_1\\ \dot{C}_2\end{bmatrix} = b$$

$$\begin{bmatrix}\dot{C}_1\\ \dot{C}_2\end{bmatrix} = e^{-At}b = e^{-At}\begin{bmatrix}t\\ 1\end{bmatrix} = e^{-2t}\begin{bmatrix}1-t & t\\ -t & 1+t\end{bmatrix}\begin{bmatrix}t\\ 1\end{bmatrix} = e^{-2t}\begin{bmatrix}t-t^2+t\\ -t^2+t+1\end{bmatrix}$$

$$\dot{c}_1 = e^{-2t}\left(2t - t^2\right)$$

$$\dot{c}_2 = e^{-2t}\left(-t^2 + t + 1\right)$$

Funkcją pierwotną do

$$t \mapsto (-t^2 + 2t)\exp(-2t)$$

jest na przykład

$$t \mapsto \left(\frac{1}{2}t^2 - \frac{1}{2}t - \frac{1}{4}\right)\exp(-2t),$$

zaś funkcją pierwotną do

$$t \mapsto (-t^2 + t + 1)\exp(-2t)$$

jest

$$t \mapsto \left(\frac{1}{2}t^2 - \frac{1}{2}\right)\exp(-2t).$$

$$c_1(t) = e^{-2t}\left(\frac{1}{2}t^2 - \frac{1}{2}t - \frac{1}{4}\right)$$

$$c_2(t) = e^{-2t}\left(\frac{1}{2}t^2 - \frac{1}{2}\right)$$

RSRN : $$e^{At}\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = e^{2t}\begin{bmatrix} t+1 & -t \\ t & 1-t \end{bmatrix} e^{-2t} \cdot \frac{1}{2}\begin{bmatrix} t^2 - t - 1/2 \\ t^2 - 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \frac{1}{2}\begin{bmatrix} (t+1)(t^2 - t - \frac{1}{2}) - t(t^2 - 1) \\ t(t^2 - t - \frac{1}{2}) + (1-t)(t^2 - 1) \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} \cancel{t^3} + \cancel{t^2} - \cancel{t^2} - \cancel{t} - \frac{1}{2}t - \frac{1}{2} - \cancel{t^3} + \cancel{t} \\ \cancel{t^3} - \cancel{t^2} - \frac{1}{2}t + \cancel{t^2} - \cancel{t^3} - 1 + t \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} -\frac{1}{2}t - \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2}t - 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} -t - 1 \\ t - 2 \end{bmatrix}$$

RORN :

$$\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = e^{2t}\begin{bmatrix} t+1 & -t \\ t & 1-t \end{bmatrix}\begin{bmatrix} C_x \\ C_y \end{bmatrix} + \frac{1}{4}\begin{bmatrix} -t-1 \\ t-2 \end{bmatrix}$$

$$\boxed{\begin{aligned} x(t) &= e^{2t}\left[t(C_x - C_y) + C_x\right] - \frac{1}{4}t - \frac{1}{4} \\ y(t) &= e^{2t}\left[t(C_x - C_y) + C_y\right] + \frac{1}{4}t - \frac{1}{2} \end{aligned}}$$