W czasie wykładu liczby rzeczywiste zdefiniowaliśmy aksjomatycznie. Wiemy zatem jakie operacje wolno nam wykonywać i jakie prawa w $\mathbb{R}$ obowiązują. Odpowiedzi na niektóre pytania są jednak wcale nieoczywiste. Na przykład czy w $\mathbb{R}$ istnieje liczba x taka, że $x^2 = 2$? Zanim zajmiemy się tym pytaniem powinniśmy uświadomić sobie, że (1) $\mathbb{N} \subset \mathbb{R}$ istotnie, mamy w $\mathbb{R}$ element neutralny ze względu na mnożenie, czyli 1, dodając je wielokrotnie do siebie wyprodukujemy zbiór, który może być utożsamiony z $\mathbb{N}$. Pisząc w aksjomacie Archimedesa $\forall x \in \mathbb{R}\ \forall y \in \mathbb{R}_+\ \exists n : ny > x$ mamy na myśli właśnie to zanurzenie $\mathbb{N}$ w $\mathbb{R}$. (2) Da się w niezbyt skomplikowany sposób udowodnić, że $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$. W dalszych rozważaniach będziemy przyjmować, że to wiemy.

Liczba $\sqrt{2}$, jeśli istnieje, nie jest liczbą wymierną. Gdyby $\sqrt{2}$ był wymierny dałoby się go zapisać jako iloraz dwóch liczb całkowitych $\sqrt{2} = \frac{k}{l}$. Załóżmy

$$2 = \frac{k^2}{l^2} \qquad 2l^2 = k^2$$ lewa strona jest liczbą parzystą

wobec tego prawa też musi być parzysta. To oznacza, że w rozkładzie k na czynniki pierwsze jest liczba 2, bo iloczyn nieparzystych jest nieparzysty. Wtedy jednak prawa strona dzieli się przez 4. Lewa też musi, wobec tego l też musi być parzyste. Wtedy jednak ułamek k/l nie jest nieskracalny – sprzeczność! □

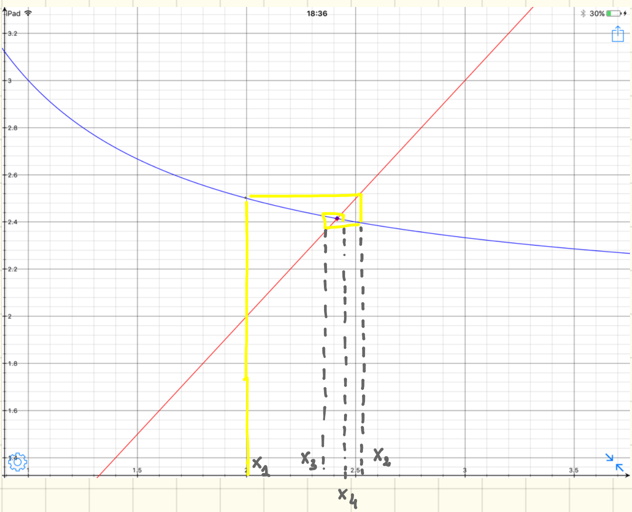
Jak więc wykazać że $\sqrt{2}$ istnieje? Trzeba skorzystać z aksjomatu zupełności. W tym celu trzeba przybliżyć $\sqrt{2}$ za pomocą dwóch ciągów liczb wymiernych z góry i z dołu. Inspiracja do „wyprodukowania" takich ciągów pochodzi z teorii ułamków łańcuchowych. Poniżej znajdą państwo zapis mojego „wymyślania". Nie gwarantuję, że jest to najprostsze możliwe rozumowanie.

Zaczynamy od pewnego rachunku. Ma on charakter przygotowawczy:

$$1 = 2-1 = (\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1) \Rightarrow \sqrt{2}-1 = \frac{1}{1+\sqrt{2}} \Rightarrow \sqrt{2} = \frac{1}{1+\sqrt{2}}+1$$

$$\Rightarrow \sqrt{2} = 1+\frac{1}{1+\sqrt{2}} = 1+\frac{1}{2+\frac{1}{1+\sqrt{2}}} = 1+\frac{1}{2+\frac{1}{2+\frac{1}{2+\sqrt{2}}}} = \dots$$

Rozważmy ciąg: $2,\ 2+\frac{1}{2},\ 2+\frac{1}{2+\frac{1}{2}},\ 2+\frac{1}{2+\frac{1}{2+\frac{1}{2}}},\ \dots$ czyli ciąg dany wzorem $x_1 = 2$, $x_n = 2+\frac{1}{x_{n-1}}$. Można wykazać, że kolejne wyrazy tego ciągu zbliżają się do liczby $1+\sqrt{2}$. Wyrazy tego ciągu są wymierne. Można go „poprawić" o -1 i dostaniemy wymierny ciąg przybliżający $\sqrt{2}$. Problem jedynie w tym, że (x_n) oscyluje, to znaczy co drugi wyraz jest większy a co drugi mniejszy niż $\sqrt{2}+1$. Można się o tym przekonać patrząc na obrazek:



Możemy wziąć $y_n = x_{2n}$ z $y_1 = 2$ i $z_n = x_{2n-1}$ $z_1 = \frac{5}{2}$, to znaczy dwa ciągi parzystych i nieparzystych elementów (x_n) dostaniemy te ciągi, które są nam potrzebne do przybliżenia $1+\sqrt{2}$ (a co za tym idzie $\sqrt{2}$) z góry i z dołu przez liczby wymierne

Wzór na co drugi wyraz x_n dostajemy składając ze sobą funkcję definiującą (x_n)

$$x_n = 2+\frac{1}{x_{n-1}} \quad \text{tzn} \quad x_n = f(x_{n-1}) \quad f(t) = 2+\frac{1}{t} \qquad f(f(t)) = 2+\frac{1}{2+\frac{1}{t}} =$$

$$2+\frac{t}{2t+1} = \frac{4t+2+t}{2t+1} = \frac{5t+2}{2t+1}$$

Jeśli więc nie ma błędów rachunkowych, to dwa ciągi

$$y_n = \frac{5y_{n-1}+2}{2y_{n-1}+1} \quad y_1 = 2 \qquad z_n = \frac{5z_{n-1}+2}{2z_{n-1}+1} \qquad z_1 = \frac{5}{2}$$

Przybliżają $1+\sqrt{2}$ z góry i z dołu. Są to ciągi liczb wymiernych. Dowód tego, że istotnie między nimi „mieści" się tylko jedna liczba i że jest nią właśnie $1+\sqrt{2}$ proponuję zostawić na trochę później. Będzie nam łatwiej, kiedy poznamy pojęcie kresu zbioru i udowodnimy istnienie kresów zbiorów ograniczonych w $\mathbb{R}$.