WYKŁAD 1

WEKTOROWE PRZESTRZENIE UNORMOWANE

26.02.2016

Drugi semestr Analizy od strony praktycznej poświęcony jest głównie funkcjom wielu zmiennych rzeczywistych. W warstwie teoretycznej spróbujemy myśleć nieco ogólniej dopuszczając także zagadnienia związane z odwzorowaniami na przestrzeniach nieskończenie wymiarowych (cokolwiek to znaczy)

Zajmować się będziemy rachunkiem różniczkowym, dla którego centralnym pojęciem jest pochodna. Jak to było dla funkcji jednej zmiennej:

$$f: I \longrightarrow \mathbb{R}, \quad I \subset \mathbb{R}$$

$$x \in I \qquad h \in]-\varepsilon, \varepsilon[$$

$$f(x+h) = f(x) + a \cdot h + R(x,h) \quad (*) \qquad \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = ? \quad (**)$$

f jest różniczkowalna w x jeśli istnieje a: $\frac{R(x,h)}{h} \xrightarrow[h \to 0]{} 0$

$a = f'(x)$

f jest różniczkowalna w x jeśli powyższa granica istnieje. W takim przypadku jest ona równa $f'(x)$

Dla funkcji jednej zmiennej oba podejścia są równie dobre i, oczywiście, definicje pochodnej są równoważne.

Pomyślmy teraz nad odpowiednią definicją dla f. wielu zmiennych, na przykład dwóch:

$$U \subset \mathbb{R}^2 \qquad (x,y) \in U \qquad f: U \longrightarrow \mathbb{R}$$

Pochodna mówi o zachowaniu funkcji w pobliżu punktu – pozwala przybliżać funkcję być może skomplikowaną funkcją prostszą. To oznacza, że trzeba badać f w punktach sąsiadujących z (x,y) tzn $(x+\delta x, y+\delta y)$. Przyrost $h=(\delta x, \delta y)$ jest elementem $\mathbb{R}^2$. W szczególności wyrażenie (**) nie bardzo da się zapisać. Jak dzielić przez element $\mathbb{R}^2$? Wyrażenie (*) da się zapisać jeśli zastąpimy jedną liczbę a czymś ogólniejszym i inaczej sformułujemy warunki: **2**

$$f(x+\delta x, y+\delta y) = f(x,y) + A\begin{bmatrix}\delta x\\ \delta y\end{bmatrix} + R\big((x,y),(\delta x,\delta y)\big)$$

odwzorowanie liniowe z $\mathbb{R}^2$ do $\mathbb{R}$

reszta

Funkcję f przybliżamy w otoczeniu (x,y) przy pomocy wartości f w (x,y) i odwzorowanie liniowego z przestrzeni przyrostów do $\mathbb{R}$. W sumie otrzymujemy odwzorowanie afiniczne, którego wykresem jest pewna płaszczyzna. Powinna być styczna do wykresu f w punkcie $(x,y,f(x,y))$

Jak sformułować warunek na resztę? Okazuje się że potrzebna jest miara długości wektora

$$h=\begin{bmatrix}\delta x\\ \delta y\end{bmatrix}$$

$$\frac{|R(x,y;h)|}{\|h\|} \xrightarrow[h\to 0]{} 0$$

Do zdefiniowania pochodnej funkcji na $\mathbb{R}^2$ potrzebujemy

(1) struktury przestrzeni wektorowej na przestrzeni przyrostów

(2) sposobu mierzenia długości wektorów

Pochodna funkcji w punkcie jest wtedy odwzorowaniem liniowym na przestrzeni przyrostów.

To osiągamy zazwyczaj zakładając że zbiór na którym określona jest funkcja jest p.w.

To osiągamy zakładając że na przestrzeni o której mowa zadana jest pewna funkcja o dobrych własnościach zwana normą.

Od teraz przez jakiś czas pracować będziemy na unormowanych, zupełnych przestrzeniach wektorowych zwanych przestrzeniami Banacha.

DEFINICJA 63. W notacji Def. 11, 32, 21 i 61 **przestrzeń wektorowa nad ciałem** $\mathbb{K}$ (zwana też **przestrzenią** $\mathbb{K}$**-liniową**) to moduł nad pierścieniem $(\mathbb{K}, A, M, \mathsf{P}, \mathbf{0}, \mathbf{1})$ ciała $(\mathbb{K}, A, M, \mathsf{P}, \mathrm{Inv}, \mathbf{0}, \mathbf{1})$. Elementy nośnika tej struktury określamy mianem **wektorów**.

W szczególności oznacza to, że przestrzeń wektorowa nad $\mathbb{R}$ to zbiór V z działaniem $+ : V \times V \longrightarrow V$ oraz odwzorowaniem $\cdot\ \mathbb{R} \times V \longrightarrow V$ spełniającym warunki: $(V,+)$ jest grupą przemienną (element neutralny oznaczymy $\bar{0}$) ponadto

$\forall v,w \in V, \lambda \in \mathbb{R} \quad \lambda(v+w) = \lambda v + \lambda w$; $\forall \lambda,\mu \in \mathbb{R} \quad (\lambda+\mu)v = \lambda v + \mu v$

$\forall \lambda,\mu \in \mathbb{R}, \forall v \in V \quad \lambda(\mu v) = (\lambda\mu) v$; $\forall v \quad 1 \cdot v = v, \ 0 \cdot v = \bar{0}$

Przykłady są państwu, jak sądzę, znane. Potrzebować będziemy także takich pojęć jak liniowa niezależność, baza, wymiar p.w., odwzorowanie liniowe, macierz odwzorowania liniowego w bazie. W dalszym ciągu pojawi się też wyznacznik macierzy.

Niech V będzie rzeczywistą przestrzenią wektorową. Normą na przestrzeni V nazywamy funkcję $\|\cdot\| : V \longrightarrow \mathbb{R}$ spełniającą warunki

(1) $\forall x \in V \quad \|x\| \geq 0$

(4) $\|x\| = 0 \iff x = \bar{0}$

(3) $\forall x \in V, \lambda \in \mathbb{R} \quad \|\lambda x\| = |\lambda| \, \|x\|$

(2) $\forall x,y \in V \quad \|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$

Norma zadaje w V metrykę $d(x,y) = \|x-y\|$ nazywaną metryką normową. Oznacza to m.in. że na V z normą jest topologia i sens ma pojęcie ciągłości. Wiadomo także co to są ciągi Cauchy'ego i zdefiniowane jest pojęcie zupełności.

Przestrzeń wektorowa z normą nazywa się **przestrzenią unormowaną**. Jeśli dodatkowo przestrzeń ta jest zupełna mówimy że jest to **przestrzeń Banacha**.

4

Stefan Banach

30.03.1892 Kraków –

– 31.08.1945 Lwów

PRZYKŁADY:

(1) $\mathbb{R}^n$ z normą euklidesową

$$\|(x_1,\dots,x_n)\| = \left(x_1^2+\dots+x_n^2\right)^{1/2}$$ jest p. Banacha

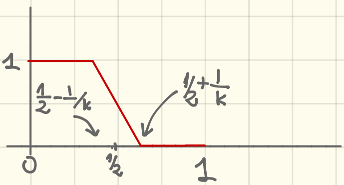
(2) Niech X będzie zbiorem. $B(X)$ oznacza zbiór rzeczywistych ograniczonych funkcji na X. $B(X)$ z normą $\|f\| = \sup_{x\in X}|f(x)|$ jest przestrzenią Banacha.

(3) Niech (X,d) będzie przestrzenią metryczną. Zbiór funkcji ograniczonych i ciągłych na X z normą supremum jest przestrzenią Banacha.

(4) $C([a,b])$ oznacza zbiór funkcji ciągłych na odcinku $[a,b]$. Zdefiniujmy

$$\|f\| = \int_a^b |f(t)|\,dt.$$ Wzór ten określa normę zwaną normą L^1.

$C([a,b])$ wraz z tą normą jest przestrzenią unormowaną ale nie jest przestrzenią Banacha gdyż nie jest zupełna. Ciąg $\varphi_k : [0,1] \to \mathbb{R}$



$$\varphi_k(t) = \begin{cases} 1 & t \leq \frac{1}{2}-\frac{1}{k} \\ -\frac{k}{2}t + \frac{(k+2)}{4} & t \in \left]\frac{1}{2}-\frac{1}{k}, \frac{1}{2}+\frac{1}{k}\right[\\ 0 & t \geq \frac{1}{2}+\frac{1}{k} \end{cases}$$

jest Cauchy'ego ale nie ma granicy w $C([0,1])$

Zauważmy że na $C([a,b])$ mamy dwie normy: L^1 i sup. Normy te zadają różne topologie na tej przestrzeni!

(5) W przykładzie (1) normę euklidesową można zamienić na p-normę
$$\|x\| = \left(\sum (x_i)^p\right)^{1/p} \quad \text{lub} \quad \|x\| = \max_i \{|x_i|\}$$

(6) W przykładzie (4) można zamienić normę L_1 na normę L_p:
$$\|f\| = \left(\int_a^b |f(t)|^p dt\right)^{1/p}$$

Normy z przykładu (1), (5) zadają tę samą topologię na $\mathbb{R}^n$ i prowadzą do równoważnych metryk.

Mówimy że dwie normy na przestrzeni V są równoważne jeśli zadają równoważne metryki.

W ramach przygotowania do definicji pochodnej odwzorowania w kontekście przestrzeni Banacha zajmiemy się najpierw trochę strukturą samej przestrzeni a następnie odwzorowaniami liniowymi (które mają służyć jako pochodne)

O PRZESTRZENIACH Z NORMĄ i PRZESTRZENIACH BANACHA:

1. Zauważmy przede wszystkim, że topologia zadawana przez normę jest zgodna ze strukturą przestrzeni wektorowej w tym sensie, że:

FAKT: Dodawanie wektorów i mnożenie przez liczbę w przestrzeni unormowanej to odwzorowania ciągłe.

DOWÓD:
$$V \times V \ni (x,y) \longmapsto x+y \in V$$
niech $x_n \to x$, $y_n \to y$ w $(V, \|\cdot\|)$ wtedy $\|(x_n+y_n)-(x+y)\| =$

$$\|(x_n-x)+(y_n-y)\| \leq \underbrace{\|x_n-x\|}_{<\varepsilon} + \underbrace{\|y_n-y\|}_{<\varepsilon} < 2\varepsilon \quad \text{zatem } x_n+y_n \to x+y$$

$\mathbb{R} \times V \ni (\lambda, x) \longmapsto \lambda x \in V \qquad \lambda_n \to \lambda, \; x_n \to x \qquad \|\lambda_n x_n - \lambda x\| = \|\lambda_n x_n - \lambda_n x + \lambda_n x - \lambda x\|$

$= \| \lambda_n(x_n - x) + x(\lambda_n - \lambda) \| \leq \| \lambda_n (x_n - x) \| + \| (\lambda_n - \lambda) x \| = \underset{< |\lambda| + \varepsilon}{|\lambda_n|} \underbrace{\| x_n - x \|}_{< \varepsilon} + \underbrace{|\lambda_n - \lambda|}_{< \varepsilon} \|x\| \leq$ 6

$\leq (|\lambda| + \varepsilon) \cdot \varepsilon + \|x\| \varepsilon \longleftarrow$ dowolnie małe.

■

FAKT: Norma $\|\cdot\| : V \longrightarrow \mathbb{R}$ jest funkcją ciągłą

DOWÓD:

$x_n \longrightarrow x$ Oznacza to, że $\forall \varepsilon > 0 \ \exists n : \ \forall m > n \quad \|x_m - x\| < \varepsilon$

$$\left.\begin{array}{l} \|x\| = \|x - x_n + x_n\| \leq \|x - x_n\| + \|x_n\| \Rightarrow \|x\| - \|x_n\| \leq \|x - x_n\| \\ \|x_n\| = \|x_n + x - x\| \leq \|x_n - x\| + \|x\| \Rightarrow \|x_n\| - \|x\| \leq \|x - x_n\| \end{array}\right\} \Rightarrow \big| \|x\| - \|x_n\| \big| \leq \|x - x_n\|$$

$$\big| \|x\| - \|x_n\| \big| \leq \|x - x_n\| < \varepsilon \longrightarrow \qquad \|x_n\| \xrightarrow{n \to \infty} \|x\|$$

■

Ogólnie rzecz biorąc równoważne metryki zadają tę samą topologię, nie jest jednak odwrotnie. Dla przestrzeni unormowanych jednak zachodzi także stwierdzenie w drugą stronę

STWIERDZENIE Jeśli topologie przestrzeni $(V, \|\cdot\|_1)$ i $(V, \|\cdot\|_2)$ są równe to normy (a więc zadawane przez nie metryki) $\|\cdot\|_2$ i $\|\cdot\|_2$ są równoważne.

DOWÓD: Zauważmy, że w przestrzeni unormowanej wszystkie informacje na temat topologii „zakodowane" są w kulach o środku w 0 i promieniu r. Istotnie: $K(x,r) = x + K(0,r)$ - kula o środku w x jest przesunięciem kuli o środku w 0. Dla wykazanie równoważności metryk należy wykazać, że istnieją dwie liczby $\alpha, \beta > 0$ takie, że

$$\|x\|_1 \leq \alpha \|x\|_2 \quad \text{i} \quad \|x\|_2 \leq \beta \|x\|_1$$

zauważmy najpierw że w przestrzeni unormowanej kula domknięta jest domknięciem kuli otwartej.

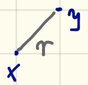
$K(x,r)=\{y: \|x-y\|<r\}$

$\overline{K}(x,r)=\{y: \|x-y\|\leq r\}$ dowodzimy $\overline{K(x,r)}=\overline{K}(x,r)$

Z definicji mamy $K(x,r)\subset\overline{K}(x,r)$ zatem $\overline{K(x,r)}\subset\overline{\overline{K}(x,r)}$ i $\overline{\overline{K}(x,r)}=\overline{K}(x,r)$ zatem $\overline{K(x,r)}\subset\overline{K}(x,r)$

kula domknięta jest zbiorem domkniętym co się łatwo sprawdza.

Pozostaje do wykazania, że zachodzi zawieranie w drugą stronę, tzn że $\overline{K}(x,r)\subset\overline{K(x,r)}$. Niech $y: \|x-y\|=r$. Wtedy $y\in\overline{K}(x,r)\setminus K(x,r)$. Rozważmy także ciąg $y_n = x+\left(\frac{n-1}{n}\right)(y-x)$ $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = y$



$$\|x-y_n\| = \left\|x-x-\left(\frac{n-1}{n}\right)(y-x)\right\| = \frac{n-1}{n}\|y-x\| = \left(1-\frac{1}{n}\right)r<r$$

tzn $y_n\in K(x,r)$ $y\in\overline{K(x,r)}$. Mamy więc $\overline{K}(x,r)\subset\overline{K(x,r)}$.

Skoro topologie są równe to $K_1(0,1)$ jest otwarta zatem istnieje $a>0$ takie, że $K_2(0,a)\subset K_1(0,1)$. To samo mamy dla kul domkniętych, tzn

$\overline{K}_2(0,a)\subset\overline{K}_1(0,1)$. Wiadomo także, że $K(x,r)=rK(x,1)$. Mamy więc $a\cdot\overline{K}_2(0,1)\subset\overline{K}_1(0,1)$ tzn $\overline{K}_2(0,1)\subset\frac{1}{a}\overline{K}_1(0,1)=\overline{K}_1(0,\frac{1}{a})$. Jeśli więc $\|x\|_2=1$ to $\|x\|_1\leq\frac{1}{a}$. Weźmy teraz x dowolne $\frac{x}{\|x\|_2}$ spełnia $\left\|\frac{x}{\|x\|_2}\right\|_2=1$ zatem $\left\|\frac{x}{\|x\|_2}\right\|_1\leq\frac{1}{a}$ $\|x\|_1\leq\frac{1}{a}\|x\|_2$ zamieniając rolami normy $\|\cdot\|_1$ i $\|\cdot\|_2$ dostajemy wynik ■

Wśród wektorowych przestrzeni unormowanych przestrzenie skończenie wymiarowe są szczególnie przyjazne, tzn mają pożyteczne własności.

(*)

FAKT: Niech $(X, \|\cdot\|)$ będzie skończeniewymiarową przestrzenią unormowaną. Wtedy: (1) jeśli $\|\cdot\|'$ jest inną normą na X, to $\|\cdot\|$ i $\|\cdot\|'$ są równoważne. (2) każdy domknięty i ograniczony podzbiór jest zwarty. (3) X jest p. Banacha, tzn jest zupełne.

DOWÓD:

Punktu (1) dowiedziemy pokazując, że każda skończeniewymiarowa przestrzeń z normą jest homeomorficzna z przestrzenią $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_\infty)$ z normą „maksimum". Homeomorfizm jest ponadto izomorfizmem liniowym. Przypominamy że homeomorfizm to jest izomorfizm przestrzeni topologicznych, tzn ciągła bijekcja, której odwrotność też jest ciągła.

Niech więc $(V, \|\cdot\|)$ będzie przestrzenią unormowaną wymiaru n. Wybierzmy w tej przestrzeni bazę $(e_1, \dots, e_n)$ taką, że $\|e_i\| = 1$

$T : \mathbb{R}^n \to V$ $T(x^1 \dots x^n) = x^1 e_1 + \dots + x^n e_n$ Pokażemy że to odwzorowanie jest ciągłe. Weźmy ciąg $x(k) = (x^1(k), \dots, x^n(k))$ zbieżny do $\bar{0}$ oznacza to, że każda z funkcji $x^i(k) \xrightarrow{k\to\infty} 0$

$$\|Tx(k)\| = \|(x^1(k)e_1 + \dots + x^n(k)e_n)\| = |x^1(k)|\|e_1\| + \dots + |x^n(k)|\|e_n\| =$$
$$= |x^1(k)| + \dots + |x^n(k)| \leq n \cdot \|x(k)\|_\infty \xrightarrow{k\to\infty} 0$$

T jest więc ciągłe w 0. Dla odwzorowania liniowego jest to wystarczające. Istotnie – weźmy $x(k) \to x$ tzn $x(k) - x \to 0$ zatem $T(x(k) - x) \to 0$ i $Tx(k) - Tx \to 0$ zatem $Tx(k) \to Tx$.

Pokażemy że T^{-1} jest ciągłe: załóżmy że nie jest. Istnieje wtedy ciąg $v_k \to 0$ taki że $T^{-1}(v_k) \not\to 0$ tzn $\|T^{-1}(v_k)\| > \varepsilon$ dla pewnego ε i nieskończenie wielu k

Wybierając podciąg z ciągu (v_k) możemy przyjąć, że $v_k \to 0$ i $\|T^{-1}(v_k)\| > \varepsilon$

weźmy
$$\lambda_k = \frac{T^{-1}(v_k)}{\|T^{-1}(v_k)\|_\infty} \qquad \lambda_k \in \mathbb{R}^n \quad i \quad \|\lambda_k\|_\infty = 1$$

(λ_k) jest ciągiem w zbiorze zwartym (sferze w $\mathbb{R}^n$)

zatem posiada podciąg zbieżny do punktu λ_0 na sferze tzn $\|\lambda_0\|_\infty = 1$

$$\lambda_{k_l} \longrightarrow \lambda_0 \neq 0 \qquad T(\lambda_{k_l}) = \frac{1}{\|T^{-1}(v_{k_l})\|} v_{k_l} \longrightarrow 0$$

bo $\frac{1}{\|T^{-1}(v_{k_l})\|} < \frac{1}{\varepsilon}$

T ciągły, więc mamy sprzeczność!

T^{-1} jest więc też ciągły.

Przestrzenie $(V, \|\cdot\|)$ i $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_\infty)$ są izomorficzne jako p. liniowe i ten izomorfizm jest także homeomorfizmem tzn obrazy i przeciwobrazy zbiorów otwartych są otwarte. Jeśli teraz mamy w V drugą normę $\|\cdot\|'$ to $(V, \|\cdot\|')$ także jest homeomorficzne z $\mathbb{R}^n$. Złożenie homeomorfizmów jest homeomorfizmem, tzn $(V, \|\cdot\|)$ jest homeomorficzne $(V, \|\cdot\|')$. Pokazywaliśmy już, że równoważne topologie oznaczają równoważne normy.

(2) i (3) wykażemy za chwilę po przedyskutowaniu pewnych własności odwzorowań liniowych w przestrzeni Banacha

ODWZOROWANIA LINIOWE NA PRZESTRZENI UNORMOWANEJ

TWIERDZENIE: $(X, \|\cdot\|_X)$, $(Y, \|\cdot\|_Y)$ są przestrzeniami unormowanymi. $T \in \mathcal{L}(X,Y)$. Równoważne są warunki:

(1) T jest ciągłe, (2) T jest ciągłe w $\bar{0}$, (2) $\sup\limits_{\|x\|_X \le 1} \|Tx\|_Y < \infty$

DOWÓD: (1) => (2) oczywiste (2) => (3) a.a. załóżmy, że $\sup\limits_{\|x\|_X \le 1} \|Tx\|_Y = +\infty$. Oznacza to, że istnieje ciąg elementów $x_k \in X$