

WYKŁAD 10

POWIERZCHNIE W PRZESTRZENI AFINICZNEJ

5.04.2016

Krzywoliniowe układy współrzędnych: było na ćwiczeniach, było na fizyce, teraz popatrzymy na nie od strony teoretycznej. Rozważanie prowadzimy w przypadku $\dim X < \infty$

63

(1) X jest przestrzenią wektorową, jednak funkcje które na niej rozważamy często nie są liniowe. Nie jest więc ważne, że $x \in X$ jest wektorem. Ważne jest, że przyrosty „ h ” są wektorami i że możemy napisać $x+h \in X$. Ostatecznie przy głębszym przyjrzeniu się sytuacji wykorzystujemy **afiniczny** a nie wektorową strukturę X .

DEFINICJA: Przestrzeń **afiniczną** nazywamy zbiór A wraz z przestrzenią wektorową V i odwzorowaniem $\alpha: A \times V \rightarrow A$ takim, że $\alpha(\alpha(a, v), w) = \alpha(a, v+w)$, $\alpha(a, \vec{0}) = a$, $\forall a, b \in A \exists ! \vec{v} \in V: \alpha(a, \vec{v}) = b$. Zamiast $\alpha(a, \vec{v})$ piszemy $a + \vec{v}$ jeśli $a + \vec{v} = b$ piszemy $\vec{v} = b - a$.

Przestrzeń afiniczna jest jak przestrzeń wektorowa bez zera. V nazywamy przestrzenią modelową dla V . O V mówi się także przestrzeń wektorowa swobodnych. Przestrzeń fizyczna nierelatywistyczna jest przestrzenią afiniczną. Czasoprzestrzeń szczególnej teorii względności jest p. afiniczną. Czasoprzestrzeń newtonowska jest p. afiniczną.

(2)

Wybranie punktu w przestrzeni afinicznej jest równoważne z ustanowieniem bijekcji $V \rightarrow A$ $\vec{v} \mapsto a_0 + \vec{v}$. Mając bazę w V możemy wprowadzić układ współrzędnych w A .

$e = (e_1, \dots, e_n) \in V$

$$\Phi: A \longrightarrow \mathbb{R}^n : \Phi(a) = (\varphi^1(a), \dots, \varphi^n(a))$$

takie że

$$a = a_0 + \varphi^1(a)e_1 + \dots + \varphi^n(a)e_n$$

z własności α („+”) wynika, że Φ jest bijekcją. Taki układ współrzędnych nazywalibyśmy **afinicznym** lub prostoliniowym.

Wiedząc już jednak pewnością, że tego rodzaju układy współrzędnych są w wielu wypadkach niepraktyczne. Jeśli np. chcemy opisywać pole grawitacyjne ziemi (w ramach teorii nierelatywistycznej) o którym wiemy, że jest 2 grubszą sferyczną symetryczną wygodnie jest użyć współrzędnych które 'oddają' ten stan rzeczy.

64

DEFINICJA: Niech Θ będzie otwartą w X . Odwzorowanie $\Phi: \Theta \rightarrow \mathbb{R}^n$ które jest bijekcją na obraz, jest różniczkowalne (ew C^k , gładkie) i jego odwrotność jest różniczkowalna (C^k , gładka) nazywamy **lokalnym układem współrzędnych** na Θ

↑
rozważać będziemy gładkie

Lokalne układy współrzędnych są lokalne, tzn "działają" w Θ i nie musimy dać się rozszerzyć. Np. weźmy $\Theta = \mathbb{R}^2 \setminus \{(x, 0) : x \geq 0\}$ i odwzorowanie

$$\Phi: \Theta \rightarrow \mathbb{R}^2$$

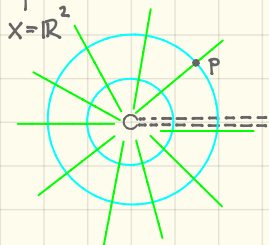
$$r(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\varphi(x, y) = \begin{cases} \arctg \frac{y}{x} & x > 0 \\ \frac{\pi}{2} & x = 0, y > 0 \\ \pi + \arctg \frac{y}{x} & x < 0 \\ \frac{3\pi}{2} & x = 0, y < 0 \\ 2\pi + \arctg \frac{y}{x} & x > 0, y < 0 \end{cases}$$

Biegunowy układ współrzędnych.

$$\Phi^{-1}:]0, \infty[\times]0, 2\pi[\longrightarrow \Theta \quad (r, \varphi) \longmapsto (r \cos \varphi, r \sin \varphi)$$

(3) Biegunowy układ współrzędnych dobrze nadaje się do uzasadnienia potrzeby wprowadzenia nowego pojęcia



Zauważmy, że w otoczeniu punktu $p \in \Theta$ określona jest funkcja f , różniczkowalna. Istnieje zatem

$$f'(p) \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}) \stackrel{\uparrow}{=} L(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$$

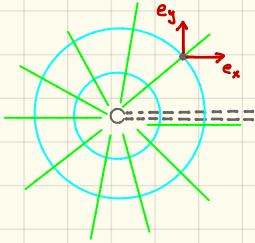
skończony wymiar

$f'(p)$, jako odwzorowanie liniowe można wyrazić macierzą w bazie.

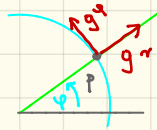
Zazwyczaj korzystamy z bazy kanonicznej w $\mathbb{R}^2$. Dlaczego to $\mathbb{R}^2$ jest na czerwono? Dlatego, że jest to przestrzeń przynastaw a nie wyjątkowe $\mathbb{R}^2$. W bazy kanonicznej mamy oczywiście

$$f'(p) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(p) & \frac{\partial f}{\partial y}(p) \end{bmatrix}$$

65



W przestrzeni $\mathbb{R}^2$ możemy też użyć innej bazy. Na przykład takiej: obróconej o kąt φ



$$\begin{aligned} g_r &= \cos \varphi e_x + \sin \varphi e_y \\ g_\varphi &= -\sin \varphi e_x + \cos \varphi e_y \end{aligned}$$

$$[f'(p)]_g^1 = [f'(p)]_e^1 [id]_g^e$$

$$\begin{bmatrix} [g_r]^e & [g_\varphi]^e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{bmatrix}$$

$$[f'(p)]_g^1 = \begin{bmatrix} f_x & f_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \varphi f_x + \sin \varphi f_y & -\sin \varphi f_x + \cos \varphi f_y \end{bmatrix}$$

Widać, że baza f jest jakos związana z układem współrzędnych Φ . Intuicyjnie rzecz biorąc f_p jest „styczny” do linii stałego r a f_r „styczny” do linii stałego φ .

DEFINICJA: Niech (A, V) będzie przestrzenią afiniczną. Wektorem stycznym do A nazywamy klasę równoważności gładkich krzywych $\gamma: \mathbb{R} \supset I \rightarrow A$ względem relacji

$$\gamma \sim \tilde{\gamma} \Leftrightarrow \gamma(0) = \tilde{\gamma}(0), \quad \forall f \in C^\infty(A, \mathbb{R}) \quad (f \circ \gamma)'(0) = (f \circ \tilde{\gamma})'(0)$$

przechodzą przez ten sam punkt są styczne

OBJAŚNIENIE: Definicja jest abstrakcyjna na potrzeby przyszłych uogólnień. Objasnienie:

$(f \circ \gamma)'(0) = f'(\gamma(0)) \cdot \gamma'(0) = f'(a) \gamma'(0)$. Krzywe są równoważne jeśli ich pochodne w a są sobie równe i jeśli przechodzą przez ten sam punkt. $\gamma'(0) \in L(\mathbb{R}, V)$

W $\mathbb{R}$ jest wyróżniony element tzn 1. Wektor definiowany przez $[\gamma]$ można reprezentować przez parę $(a, \gamma'(0)1) \in A \times V$

66

Zbiór wszystkich wektorów stycznych w punkcie a do A oznaczamy $T_a A$. Łatwo sprawdzić, że istnieje jednoznaczna odpowiedniość między $T_a A$ i V :

$$\gamma \in V \quad \gamma_\gamma(t) = a + t\gamma \quad \gamma \mapsto [\gamma]$$

$$T_a A \simeq V$$

$$T_a A \ni [\gamma] \mapsto \gamma'(0)1 \in V$$

$*$ $\longrightarrow$ Verte

Przestrzeń przrrostów w punkcie $a \in A$ to $T_a A$

(5) Wrócamy do bazy g (w $T_p \mathbb{R}^2 \simeq \mathbb{R}^2$) Mamy dwie krzywe

$$\gamma_\varphi: t \mapsto (x_\varphi(t) = r \cos(\varphi + t), y_\varphi(t) = r \sin(\varphi + t))$$

$$\gamma_r: t \mapsto (x_r(t) = (r+t) \cos \varphi, y_r(t) = (r+t) \sin \varphi)$$

$$\gamma'_\varphi(0) = \begin{bmatrix} -r \sin \varphi \\ r \cos \varphi \end{bmatrix} \quad \gamma'_\varphi(0)1 = -r \sin \varphi e_x + r \cos \varphi e_y = r g_\varphi = \partial_\varphi$$

$$\gamma'_r(0) = \begin{bmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \end{bmatrix} \quad \gamma'_r(0)1 = \cos \varphi e_x + \sin \varphi e_y = g_r = \partial_r$$

Baza wektorów stycznych do krzywych współrzędnościowych to niemal ta baza którą zaproponowaliśmy wcześniej, z dokładnością do długości jednego z wektorów. Skąd oznaczenia $\partial_\varphi, \partial_r$? Policzmy

$$\tilde{f}(r, \varphi) = f(x(r, \varphi), y(r, \varphi)) \quad \tilde{f}:]0, \infty[\times]0, 2\pi[\ni (r, \varphi) \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$\frac{\partial \tilde{f}}{\partial \varphi} = \frac{\partial f}{\partial x} (-r \sin \varphi) + \frac{\partial f}{\partial y} (r \cos \varphi)$$

$$\frac{\partial \tilde{f}}{\partial r} = \frac{\partial f}{\partial x} \cos \varphi + \frac{\partial f}{\partial y} \sin \varphi$$

$\frac{1}{r}$

$$\left[\frac{\partial \tilde{f}}{\partial r} \quad \frac{1}{r} \frac{\partial \tilde{f}}{\partial \varphi} \right]$$

$$[f'(p)]_g^1 = \begin{bmatrix} f_x & f_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \varphi f_x + \sin \varphi f_y & -\sin \varphi f_x + \cos \varphi f_y \end{bmatrix}$$

$$[f'(p)]_{(\partial_r, \partial_\varphi)}^1 = \begin{bmatrix} \frac{\partial \tilde{f}}{\partial r} & \frac{\partial \tilde{f}}{\partial \varphi} \end{bmatrix}$$

* DYGRESJA O STRUKTURZE WEKTOROWEJ PRZESTRZENI STYCZNEJ $T_a A$

67

Z definicji, w.g. której wektory styczne to klasy równoważności krzywych nie wynika wprost, że zbiór wszystkich klas równoważności ma strukturę przestrzeni wektorowej. Używając reprezentantów, czyli krzywych, można zdefiniować jedynie mnożenie wektora przez liczbę używając reparametryzacji. Np

$$v = [\gamma] \quad \alpha \cdot v = [\gamma'] \quad \gamma'(t) = \gamma(\alpha \cdot t)$$

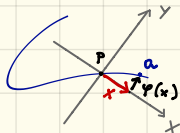
Dodawanie wektorów "na reprezentantach" nie zdefiniujemy. Struktura przestrzeni wektorowej jednak istnieje — jak się to robi dowiedzieć się państwo na wykładzie z GR. W naszym przypadku, na przestrzeni afinicznej, nie ma problemu. Pokazujemy, że $T_a A$ jest w jednoznacznej odpowiedniości z V i "pobieramy" strukturę wektorową z V .

POWIERZCHNIE: Powierzchnię w przestrzeni afinicznej A nazywamy podzbiór M , który jest lokalnie wykresem odwzorowania. Oto formalna definicja:

Niech A będzie przestrzenią afiniczną wymiaru n . **Powierzchnię** klasy C^k (gładką) **wymiaru $m < n$** nazywamy podzbiór $M \subset A$ taki, że dla każdego punktu $p \in M$ istnieje otoczenie $\mathcal{O} \subset A$, podprzestrzeń $X \subset V$ wymiaru m , podprzestrzeń dopełniającą Y , tzn. $V = X \oplus Y$ oraz odwzorowanie klasy C^k (gładkie) $\varphi: X \supset \mathcal{U} \rightarrow Y$ takie że

$$M \cap \mathcal{O} = \{a: a = p + x + \varphi(x)\}$$

68



W praktyce, jeśli chcemy pokazać, że zbiór jest powierzchnią spełniającą się na definicji, to wystarczy pokazać, że istnieje $(\mathcal{O}_\beta)_{\beta \in B}$ pokrycie otwarte M

takie, że $M \cap \mathcal{O}_\beta$ jest wykresem odwzorowania dla wszystkich β .

Metody sprawdzania czy M jest powierzchnią są dostosowane do tego jak M jest zadane. Najczęściej M jest zadane przy pomocy jednego z dwóch warunków

$$F: A \rightarrow \mathbb{R}^{n-m} \quad M = F^{-1}(\bar{0}) \quad M \text{ jest poziomicą funkcji}$$

$$K: \mathbb{R}^m \rightarrow A \quad M = K(\mathcal{U}) \quad M \text{ jest obrazem odwzorowania}$$

TWIERDZENIE (1): $F: A \supset \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}^{n-m} \quad M = F^{-1}(\bar{0}) \neq \emptyset$

Jeśli w każdym punkcie $p \in M$ $F'(p)$ jest maksymalnego rzędu $(n-m)$ to M jest powierzchnią

TWIERDZENIE (2): $K: \mathbb{R}^m \supset \mathcal{U} \rightarrow A \quad M = K(\mathcal{U})$ jeśli $\forall x \in \mathcal{U} \quad K'(x)$ jest maksymalnego rzędu to M jest lokalnie powierzchnią, tzn. $\forall x \exists \mathcal{O} \subset \mathcal{U}$ takie, że $K(\mathcal{O})$ jest powierzchnią.

69

DOWÓD (1) Jeśli $F'(p)$ ma rząd $n-m$ to istnieje podprzestrzeń $Y \subset V$ taka, że $F'(p)|_Y$ jest liniowym izomorfizmem Y na $\mathbb{R}^{n-m}$. Weźmy jako X dowolną przestrzeń dopełniającą Y w V , tzn. $V = X \oplus Y$.

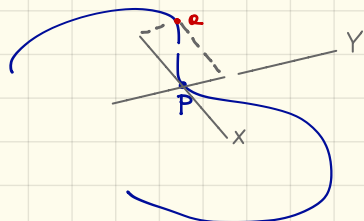
Odwzorowanie $\Phi: X \oplus Y \rightarrow U \ni (x, y) \mapsto F(p+x+y) \in \mathbb{R}^{n-m}$ spełnia

warunki twierdzenia o funkcji uwikłanej, tzn. istnieje $\partial \times V \subset U$ i

$\varphi: \partial \rightarrow V$ takie, że $\Phi(x, \varphi(x)) = 0 = F(p+x+\varphi(x))$. Wiadomo także, że dla wystarczająco małych ∂ i V $y = \varphi(x)$ jest jedynym rozwiązaniem równania $\Phi(x, y) = 0$ w V . Mamy więc

$$M \cap (0 \times V) = \{(x, \varphi(x)) : x \in \partial\} \quad M \text{ jest więc powierzchnią.}$$

DOWÓD (2) Dla uproszczenia notacji założymy, że $K(0) = p$. Oznaczamy $X = \text{im } k'(0)$ $\dim X = m$ i Y dopełniającą, tak, że $V = X \oplus Y$.



$P_X: V \rightarrow X$ rzuty związane
 $P_Y: V \rightarrow Y$ z rozkładem

$$K_1: \mathbb{R}^m \rightarrow X \quad K_1(r) = P_X(k(r) - p)$$

$$K_2: \mathbb{R}^m \rightarrow Y \quad K_2(r) = P_Y(k(r) - p)$$

$$P_X + P_Y = \text{id}_V \quad k(r) = p + K_1(r) + K_2(r)$$

$$k'(0) = K_1'(0) + K_2'(0) \quad \text{tzn. } \forall h \in \mathbb{R}^m \quad \underbrace{k'(0)h}_X = \underbrace{K_1'(0)h}_X + \underbrace{K_2'(0)h}_Y \Rightarrow K_2'(0) = 0$$

i $k'(0) = K_1'(0) \Rightarrow K_1'$ jest maksymalnego rzędu zatem spełnia warunki tw. o lokalnej odwracalności

Istnieje więc otoczenie U punktu $0 \in X$ takie że istnieje $K_1^{-1}: U \rightarrow \mathbb{R}^m$

$$\varphi: \underbrace{U}_X \rightarrow Y = K_2 \circ K_1^{-1} \quad \text{obraz } k \text{ jest lokalnie postaci}$$

$$a = p + x + \varphi(x)$$

$$K_2(r) = x \quad \downarrow$$

$$r = K_1^{-1}(x)$$

$$x \mapsto K_1^{-1}(x) \mapsto \underbrace{K_2(K_1^{-1}(x))}_{\varphi(x)} = y$$

$$a = p + x + y = p + x + \varphi(x)$$

 $(*)$
$$M \cap \mathcal{O} = \{a \in A : \varphi^{m+1}(a) = \dots = \varphi^n(a) = 0\}.$$

$\Rightarrow$ Jeśli M jest powierzchnią gładką, to w otoczeniu $\emptyset$ punktu $p \in M$ $M \cap \emptyset$ jest postaci $a = p + x + \sigma(x)$ dla x, γ, σ jak w d.f. powierzchni. Weźmy bazę $e = (e_1, \dots, e_n)$ dostosowaną do rozkładu $V = X \oplus Y$ tzn. $(e_1, \dots, e_m)$ jest bazą w X , $(e_{m+1}, \dots, e_n)$ bazą w Y . Weźmy też $(\varepsilon^1, \dots, \varepsilon^n)$ - baza dualna.

$$\varphi^1(a) = \langle \varepsilon^1, a-p \rangle \dots \quad \varphi^m(a) = \langle \varepsilon^m, a-p \rangle$$

$$\varphi^{m+1}(a) = \langle \varepsilon^{m+1}, a - \sigma(\mathcal{P}_X(a-p)) \rangle \quad \dots \quad \varphi^n(a) = \langle \varepsilon^{m+1}, a - \sigma(\mathcal{P}_X(a-p)) \rangle$$

71

$$\varphi^1(a) = \langle \varepsilon^1, a-p \rangle \dots \varphi^m(a) = \langle \varepsilon^m, a-p \rangle$$

$$\varphi^{m+1}(a) = \langle \varepsilon^{m+1}, a - \sigma(P_X(a-p)) \rangle \dots \varphi^n(a) = \langle \varepsilon^{m+1}, a - \sigma(P_X(a-p)) \rangle$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & \dots & 0 \\ * & * & \dots & * & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ * & * & \dots & * & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} = \phi(a) = \begin{bmatrix} \mathbb{1}_x & 0 \\ * & \mathbb{1}_y \end{bmatrix} - \text{odwzwalanie}$$

ten ϕ jest lokalnym układem współrzędnych.



WEKTORY STYCZNE DO POWIERZCHNI:

Niech (A, V) będzie przestrzenią afiniczną. Wektorem stycznym do A w punkcie a nazywaliśmy klasę równoważności krzywych przechodzących przez a dla $t=0$. Krzywe są równoważne jeśli tak samo „działają” na funkcje gładkie określone w otoczeniu a . Każdy wektor utworzyć można z pary (a, v) gdzie $v = \gamma'(0)$. Wektory styczne w punkcie $a: T_a A \cong V$ tworzą przestrzeń wektorową. Zbiór wszystkich wektorów stycznych we wszystkich punktach oznaczamy TA . Dla przestrzeni afinicznej $TA \cong A \times V$.

Jeśli w $U \subset A$ mamy układ współrzędnych $\phi = (\varphi^1, \dots, \varphi^n)$ to klasy równoważności krzywych współrzędnościowych

$$\gamma^i(t) = (\varphi^1(a), \dots, \varphi^i(a) + t, \dots, \varphi^n(a)) \text{ tworzą bazę } T_a A$$

$(\partial \varphi^1, \dots, \partial \varphi^n)$. Jeśli w U określone są dwa układy współrzędnych

$$\Phi = (\varphi^1, \dots, \varphi^n) \text{ i } \Psi = (\psi^1, \dots, \psi^n)$$