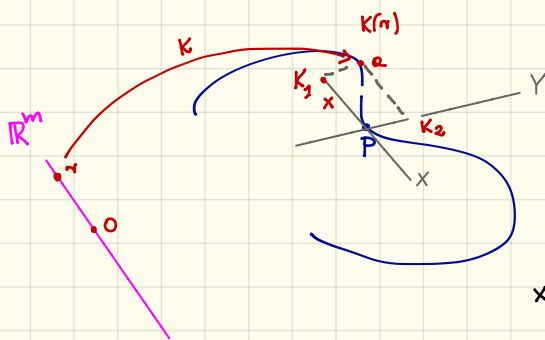


WYKŁAD 11

PRZESTRZEŃ STYCZNA DO POWIERZCHNI
TWIERDZENIE LAGRANGE'A O EKSTREMUM
FUNKCJI NA POWIERZCHNI

8.04.2016



$$a = K(r) \longrightarrow y = K_2(r)$$

$$K_2(r) = x \quad r = K_1^{-1}(x)$$

$$x \longmapsto K_1^{-1}(x) \longmapsto K_2(K_1^{-1}(x)) = y$$

$\downarrow$ $\downarrow$
 r $\varphi(x)$

$$a = p + x + y = p + x + \varphi(x)$$

Bardzo przydatne i ważne jest następujące twierdzenie:

Twierdzenie: $M \subset A$ jest gładką powierzchnią wymiaru m wtedy i tylko wtedy gdy $\forall p \in M \exists \mathcal{O} \subset A$ otwarte otoczenie i $\Phi: \mathcal{O} \rightarrow \mathbb{R}^n$ układ współrzędnych taki, że

$$M \cap \mathcal{O} = \{a \in A : \varphi^{m+1}(a) = \dots = \varphi^n(a) = 0\}$$

Dowód: $\Leftarrow$ $F: \mathcal{O} \rightarrow \mathbb{R}^{n-n_1}$ $F(a) = (\varphi^{m+1}(a), \dots, \varphi^n(a))$ $M \cap \mathcal{O} = F^{-1}(0, \dots, 0)$
 $F'(p)$ jest podmacierzą $\Phi'(p)$ zatem skoro $\Phi'(p)$ jest maksymalnego rzędu to $F'(p)$ też. Dalej korzystamy z Tw. 1.

$\Rightarrow$ Jeśli m jest powierzchnią gładką to w otoczeniu $\mathcal{O}$ punktu $p \in M$ $M \cap \mathcal{O}$ jest postaci $a = p + x + \sigma(x)$ dla x, y, σ jak w d.f. powierzchni.
 Weźmy bazę $e = (e_1, \dots, e_n)$ dostosowaną do rozkładu $V = X \oplus Y$
 tzn $(e_1, \dots, e_m)$ jest bazą w X , $(e_{m+1}, \dots, e_n)$ bazą w Y . Weźmy też $(\varepsilon^1, \dots, \varepsilon^n)$ - baza dualna

$$\varphi^1(a) = \langle \varepsilon^1, a - p \rangle \quad \dots \quad \varphi^m(a) = \langle \varepsilon^m, a - p \rangle$$

$$\varphi^{m+1}(a) = \langle \varepsilon^{m+1}, a - \sigma(P_X(a - p)) \rangle \quad \dots \quad \varphi^n(a) = \langle \varepsilon^n, a - \sigma(P_X(a - p)) \rangle$$

72

$$\varphi^1(a) = \langle \varepsilon^1, a-p \rangle \dots \varphi^m(a) = \langle \varepsilon^m, a-p \rangle$$

$$\varphi^{m+1}(a) = \langle \varepsilon^{m+1}, a - \sigma(P_X(a-p)) \rangle \dots \varphi^n(a) = \langle \varepsilon^{m+1}, a - \sigma(P_X(a-p)) \rangle$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & \dots & 0 \\ * & * & \dots & * & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ * & * & \dots & * & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} = \phi(a) = \begin{bmatrix} \mathbb{1}_X & 0 \\ * & \mathbb{1}_Y \end{bmatrix} - \text{odwzorowanie}$$

ten ϕ jest lokalnym układem współrzędnych.



WEKTORY STYCZNE DO POWIERZCHNI:

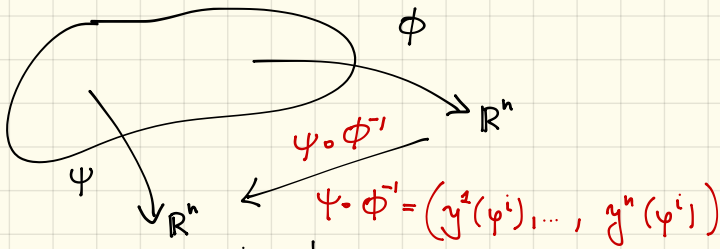
Niech (A, V) będzie przestrzenią afiniczną. Wektorem stycznym do A w punkcie a nazywaliśmy klasę równoważności krzywych przechodzących przez a dla $t=0$. Krzywe są równoważne jeśli tak samo „działają” na funkcje gładkie określone w otoczeniu a . Każdy wektor utworzyć można z parą (a, v) gdzie $v = \gamma'(0)$. Wektory styczne w punkcie $a: T_a A \cong V$ tworzą przestrzeń wektorową. Zbiór wszystkich wektorów stycznych we wszystkich punktach oznaczamy TA . Dla przestrzeni afinicznej $TA \cong A \times V$.

Jeśli w $U \subset A$ mamy układ współrzędnych $\phi = (\varphi^1, \dots, \varphi^n)$ to klasy równoważności krzywych współrzędnościowych

$$\gamma^i(t) = (\varphi^1(a), \dots, \varphi^i(a) + t, \dots, \varphi^n(a)) \text{ tworzą bazę } T_a A$$

$(\partial \varphi^1, \dots, \partial \varphi^n)$. Jeśli w U określone są dwa układy współrzędnych

$$\phi = (\varphi^1, \dots, \varphi^n) \text{ i } \psi = (\psi^1, \dots, \psi^n)$$



Transformacje wektorów bazowych

$$\frac{\partial}{\partial \varphi^1} = \frac{\partial y^1}{\partial \varphi^1} \frac{\partial}{\partial y^1} + \frac{\partial y^2}{\partial \varphi^1} \frac{\partial}{\partial y^2} + \dots + \frac{\partial y^n}{\partial \varphi^1} \frac{\partial}{\partial y^n}$$

$$\frac{\partial}{\partial \varphi^i} = \left(\frac{\partial y^k}{\partial \varphi^i} \right) \frac{\partial}{\partial y^k}$$

macierz pochodnej odwzorowania $\psi \circ \phi^{-1}$.

Niech teraz $M \subset A$ będzie m -wymiarową powierzchnią. **Wektorem stycznym do M w punkcie p** nazywamy wektor styczny do A w punkcie p dla którego istnieje reprezentant $\gamma: I \rightarrow M$. Innymi słowy, wektory styczne do M to wektory styczne do krzywych których obrazy leżą w M . Zbiór wektorów stycznych do M w punkcie p oznaczamy $T_p M$.

FAKT Niech $M \subset A$ będzie powierzchnią wymiaru m . $T_p M$ jest podprzestrzenią wektorową przestrzeni $T_p A$ wymiaru m .

DOWÓD: Z definicji $T_p M \subset T_p A$. Weźmy teraz układ współrzędnych jak w tn. (*), tam $\varphi^{m+1}(x) = \dots = \varphi^n(x)$ dla $x \in M$. Weźmy bazę $\frac{\partial}{\partial \varphi^i}$. Krzywe współrzędnościowe γ^i leżą w M , wobec tego $\frac{\partial}{\partial \varphi^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial \varphi^m}$ są styczne do M . Są to wektory liniowo niezależne. Niech teraz σ będzie dowolną krzywą w M taką, że $\sigma(0) = p$. Wektor $\sigma'(0)$ jest elementem $T_p M$ (z definicji) we współrzędnych

$$\sigma'(t) = (\varphi^1(\sigma(t)), \dots, \varphi^m(\sigma(t)), 0, \dots, 0) \text{ zatem}$$

$$\sigma'(0)1 = (\varphi^1 \circ \sigma)'(0) \frac{\partial}{\partial y^1} + (\varphi^2 \circ \sigma)'(0) \frac{\partial}{\partial y^2} + \dots + (\varphi^m \circ \sigma)'(0) \frac{\partial}{\partial y^m} \quad \text{zatem}$$

$$\sigma'(0)1 \in \left\langle \frac{\partial}{\partial y^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial y^m} \right\rangle \quad \text{zatem } T_p M \subset \left\langle \frac{\partial}{\partial y^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial y^m} \right\rangle \quad \text{z drugiej}$$

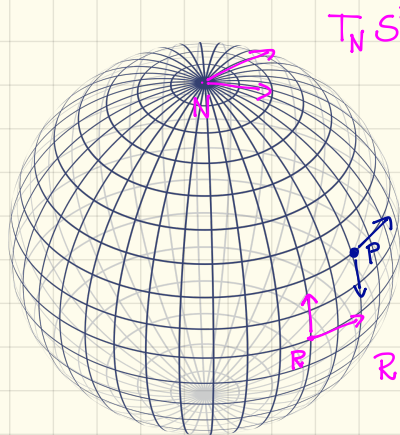
strony wektor $\lambda^1 \frac{\partial}{\partial y^1} + \dots + \lambda^m \frac{\partial}{\partial y^m}$ jest klasą równoważności kruszwej (ten jest styczny do kruszwej)

$$t \mapsto (\varphi^1(p) + \lambda^1 t, \dots, \varphi^m(p) + \lambda^m t, 0, \dots, 0) \in M \quad \text{zatem}$$

$$\left\langle \frac{\partial}{\partial y^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial y^m} \right\rangle \subset T_p M$$

 $T_p A$
1?

UWAGA: Wiemy już, że $TA \approx A \times V$. Wiemy też, że $T_p M \subset V$ jednak nie możemy napisać $TM = M \times V$. W każdym punkcie $p \in M$ $T_p M$ może być inną podprzestrzenią wektorową w V .
Weźmy $A = \mathbb{R}^3$, $M = S$



$$T_N S^2 = \left\langle \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y} \right\rangle$$

$$P = \left(\frac{\sqrt{6}}{4}, \frac{\sqrt{2}}{4}, \frac{\sqrt{2}}{2} \right)$$

$$T_P S^2 = \left\langle -\frac{\sqrt{2}}{4} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\sqrt{6}}{4} \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\sqrt{2}}{4} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\sqrt{2}}{4} \frac{\partial}{\partial y} - \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{\partial}{\partial z} \right\rangle$$

$$R = (1, 0, 0) \quad T_R S^2 = \left\langle \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right\rangle$$

Nie mamy też oczywistego sposobu porównywania wektorów stycznych w różnych punktach. Któremu wektorowi z $T_P S^2$ odpowiada $\frac{\partial}{\partial x}$ z $T_N S^2$? Nie potrafimy powiedzieć...

FAKT: Niech $F: A \rightarrow \mathbb{R}^{m-m}$ spełnia warunki twierdzenia o maksymalnym rzędzie tzn $M = F^{-1}(0)$ jest powierchnią. Wówczas $\forall p \in M \quad T_p M = \ker F'(p)$ 75

DOWÓD: Jeśli γ jest kmytą w M to $F \circ \gamma$ jest odwzorowaniem stałym, więc $(F \circ \gamma)'(0) = 0$

$$\text{Ale } \underbrace{(F \circ \gamma)'(0)}_0 = F'(\gamma(0)) \gamma'(0) = F'(p) \underbrace{\gamma'(0)}_{\text{wygodne oznaczenie na } [\gamma]} \text{ zatem } \gamma'(0) \in \ker F$$

Mamy więc $T_p M \subset \ker F'(p)$. Wiadomo także, że $\dim \ker F'(p) = n - (n-m) = m = \dim T_p M$. Oznacza to $T_p M = \ker F'(p)$

Niech A, B będą p. afinicznymi $f: A \rightarrow B$ odwzorowanie gładkie
 Zauważmy, że odwzorowanie działa na kmyse (poprzez złożenie)
 $\gamma: \mathbb{R} \rightarrow A$ $f \circ \gamma: \mathbb{R} \rightarrow B$. Działanie to „przenosi się” na
 wektory styczne, tzn. jeśli $[\gamma] = [\tilde{\gamma}]$ to $[f \circ \gamma] = [f \circ \tilde{\gamma}]$
 Istotnie

$$[\gamma] = \gamma'(0)1 = \tilde{\gamma}'(0)1 \quad [f \circ \gamma] = (f \circ \gamma)'(0)1 = f'(\gamma(0))\gamma'(0)1 =$$

$$f'(\tilde{\gamma}(0))\tilde{\gamma}'(0)1 = [f \circ \tilde{\gamma}]$$

DEFINICJA Odwzorowaniem stycznym $Tf: TA \rightarrow TB$ nazywamy

$$Tf([\gamma]) = [f \circ \gamma]$$

Obserwacja

$$\text{Jeśli } [\gamma] = (a, v) \text{ i.e. } v = \gamma'(0)1 \text{ to } Tf(a, v) = (f(a), f'(a)v)$$

Odwzorowanie styczne to odwzorowanie + pochodne. Dla A nie jest
 to może newolucyjna koncepcja, ale już dla powierzchni ma
 swoją wartość

$f: M \rightarrow N$ $Tf: TM \rightarrow TN$ $Tf([\gamma]) = [f \circ \gamma]$ Dla każdej pary
 punktów $(m, f(m))$ „drugi składnik” Tf działa między

$T_m M$ i $T_{f(m)} N$ które są podprzestrzeniami $\mathcal{U} \cap \nu(A)$ i $\nu(B)$. f
 nie musi być określone na całym $A \supset M$ – wystarczy na M .
 Wtedy f' nie da się polinąć, ale Tf owszem.

EKSTREMA FUNKCJI NA POWIERZCHNI:

77

$M \subset A$ - powierzchnia, $f: M \rightarrow \mathbb{R}$. Mówimy że p jest maksimum (minimum) lokalnym f jeśli istnieje otoczenie $\mathcal{O} \subset A$ punktu p takie, że $\forall x \in \mathcal{O} \cap M \quad f(p) \geq f(x) \quad (f(p) \leq f(x))$

Zazwyczaj bywa tak, że f zdefiniowane jest na podzbiore A istotnie większym niż M , czasami także na całym A . W takim wypadku ekstremum $f|_M$ nazywamy **ekstremum związanym** lub **ekstremum warunkowym**.

TWIERDZENIE (Metoda Lagrange'a)

Niech $F: A \supset \mathcal{O} \rightarrow \mathbb{R}^{n-m}$ będzie gładką, $\text{rk } F'(x) = m$ dla $x \in \mathcal{O}$, $M = F^{-1}(0)$. Niech także $f: U \rightarrow \mathbb{R}$ $U \subset A$ $M \subset U$

Jeśli $p \in M$ jest ekstremum $f|_M$ to istnieje liniowy funkcjonal $\uparrow$ otwarty

$\Lambda: \mathbb{R}^{m-k} \rightarrow \mathbb{R}$ taki że

$$f'(p) = \Lambda \circ F'(p)$$

DOWÓD:

Załóżmy, że $k: \overset{0}{\underset{\mathbb{R}^m}{\Omega}} \rightarrow A$ jest parametryzacją M w otoczeniu p
 $k(0) = p$

Jeśli p jest lokalnym ekstremum $f|_M$ to 0 jest lokalnym ekstremum $f \circ k$. W szczególności $\forall h \in \mathbb{R}^n$

$$(f \circ k)'(0)h = 0$$

$$f'(k(0)) \underbrace{k'(0)}_{\text{jest rzędu } m} h \quad k'(0) \text{ jest rzędu } m \text{ zatem } \text{im } k'(0) = T_p M$$

Warunkiem koniecznym ekstremum jest więc $f'(p)|_{T_p M} = 0$.

$$f'(p) \in L(V, \mathbb{R}) = V^*$$

78

$$f'(p) \in (T_p M)^0$$

↪ co to jest? Anihilator podprzestrzeni,

$$\text{tzn } \{ \alpha \in V^* : \forall v \in T_p M \langle \alpha, v \rangle = 0 \}$$

$$\dim (T_p M)^0 = n-m$$

$$T_p M = \ker F'(p) \quad F'(p) \in L(V, \mathbb{R}^{n-m}) \quad \text{tzn} \quad F'(p) = \begin{bmatrix} \alpha^1 \\ \vdots \\ \alpha^{n-m} \end{bmatrix}$$

$$\alpha^k \in V^* \quad \alpha^k|_{T_p M} = 0. \quad \text{Skoro } \text{rk } F'(p) = n-m \text{ to}$$

$\alpha^1, \dots, \alpha^{n-m}$ są liniowo niezależne. Tworzą więc bazę $(T_p M)^0$.

$f'(p)$ jako element $(T_p M)^0$ jest liniową kombinacją α^i , tzn

$$f'(p) = \lambda_1 \alpha^1 + \lambda_2 \alpha^2 + \dots + \lambda_{n-m} \alpha^{n-m} = [\lambda_1, \dots, \lambda_{n-m}] \begin{bmatrix} \alpha^1 \\ \vdots \\ \alpha^{n-m} \end{bmatrix}$$

$$= [\lambda_1 \dots \lambda_{n-m}] \cdot F'(p)$$

$$\overset{\uparrow}{L(\mathbb{R}^{n-m}, \mathbb{R})} = (\mathbb{R}^{n-m})^*$$

