

WYKŁAD 12

EKSTREMUM ZWIĄZANE - WARUNEK POŚTATECZNY

CĄTKOWANIE FUNKCJI O WART. WEKT.

RÓWNANIA RÓŻNICZKOWE - WSTĘP

12.04.2016

Przypominamy twierdzenie:

79

Twierdzenie (Metoda Lagrange'a) (Warunek konieczny)

Niech $F: A \subset \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{R}^{n-m}$ będzie gładką, $\text{rk } F'(x) = n-m$ dla $x \in \mathbb{D}$, $M = F^{-1}(0)$. Niech także $f: U \rightarrow \mathbb{R}$ $U \subset A$, $M \subset U$

Jeśli $p \in M$ jest ekstremum $f|_M$ to istnieje liniowy funkcjonal

$$\Lambda: \mathbb{R}^{n-k} \rightarrow \mathbb{R} \text{ taki że}$$
$$f'(p) = \Lambda \circ F'(p)$$

Warunek dostateczny zwierzany jest jak zwykle z badaniem drugiej (lub wyższych) pochodnej. Odpowiednie twierdzenie znane jest nam dla przestrzeni płaskiej, np $\mathbb{R}^n$. Sytuację na powierzchni rozważać więc można w parametryzacji.

Niech $M \subset A$ będzie gładką powierzchnią, $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ funkcję a $p \in M$ punktem krytycznym $f|_M$. Rozważmy także parametryzację $K: \mathbb{R}^m \subset \mathbb{D} \rightarrow M$

zakładamy, że $\bar{0} \in \mathbb{D}$ i $K(\bar{0}) = p$. Oczywiście także $K'(\bar{0})$ ma rząd maksymalny, czyli m . Wtedy $K'(\bar{0}): \underset{\mathbb{R}^m}{T_{\bar{0}} \mathbb{R}^m} \rightarrow T_p M$ jest izomorfizmem liniowym.

Obliczymy $(f|_M)''$ które w wielu przypadkach rozstrzyga o rodzaju punktu krytycznego. Postępujemy się k. Jeśli p jest punktem krytycznym $f|_M$ to $\bar{0}$ jest punktem krytycznym $f \circ K$ czyli $(f \circ K)'(\bar{0}) = 0$.

Obliczamy $(f \circ K)''$. Niech $v \in T_{\bar{0}} \mathbb{R}^m$

$$(f \circ K)'(\bar{0})v = f'(K(\bar{0}))K'(\bar{0})v \quad \leftarrow \begin{matrix} = 0 \\ +2n \end{matrix} \quad K'(\bar{0})v \in \ker f'(p)$$

Niech $y \in \mathcal{D} \subset \mathbb{R}^m$ $(f \circ k)'(y) \tilde{v} = f'(k(y)) k'(y) \tilde{v}$
 $v \in \mathbb{R}^m$

zeby obliczyć $(f \circ k)''(\tilde{v}, w)$ różniczkujemy po y

$$(f \circ k)''(y)(\tilde{v}, w) = f''(k(y))(k'(y)\tilde{v}, k'(y)w) + f'(k(y))k''(y)(\tilde{v}, w)$$

Wstawiamy $y = \bar{0}$

$$(f \circ k)''(\bar{0})(\tilde{v}, w) = f''(p)(\underbrace{k'(\bar{0})\tilde{v}}_h, \underbrace{k'(\bar{0})w}_k) + f'(p)k''(\bar{0})(\tilde{v}, w) \quad (*)$$

to na razie nie wiemy czym jest.

Pierwszy składnik to dotarcie $f''(p)$ do $T_p M$. $k'(\bar{0})$ przenosi wektory z $T_{\bar{0}} \mathbb{R}^m$ do $T_p M$ (jest to izomorfizm)

Zużycy teraz, że $M = F^{-1}(0)$ dla $F: A \rightarrow \mathbb{R}^{m-m}$, mamy więc

$F(k(y)) = 0$ Wszystkie pochodne tego związku, druga też, są zerowe:

$$(F \circ k)''(\bar{0})(\tilde{v}, w) = F''(p)(k'(\bar{0})\tilde{v}, k'(\bar{0})w) + F'(p)k''(\bar{0})(\tilde{v}, w)$$

$\downarrow$
 $0 \rightarrow F'(p)k''(\bar{0})(\tilde{v}, w) = -F''(p)(k'(\bar{0})\tilde{v}, k'(\bar{0})w)$

z tw. Lagrange'a $f'(p) = \lambda \circ F'(p)$

$$f'(p)k''(\bar{0})(\tilde{v}, w) = (\lambda \circ F'(p))k''(\bar{0})(\tilde{v}, w) =$$

$$= -\lambda \circ F''(p)(\underbrace{k'(\bar{0})\tilde{v}}_h, \underbrace{k'(\bar{0})w}_k)$$

W miejsce (*) wstawiamy co trzeba mając

$$(f \circ k)''(\bar{0})(\tilde{v}, w) = f''(p)(h, k) - \lambda \circ F''(p)(h, k) \quad \text{gdzie } h = k'(\bar{0})\tilde{v} \\ k = k'(\bar{0})w$$

Zamiast badać znak $(f \circ k)''(0)$ badamy raczej

81.

$$f''(p) - 1 \circ F''(p)$$

RÓWNANIA RÓŻNICZKOWE

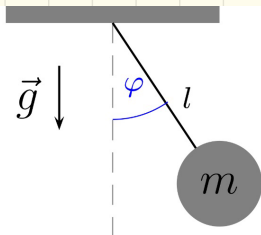
Równanie różniczkowe to jedno z ważniejszych narzędzi fizyki matematycznej. Zanim sformułujemy definicję przyjrzymy się przykładom:

(1) Jeśli $N(t)$ oznacza liczbę atomów pierwiastka promieniotwórczego która w chwili t znajduje się w próbce to funkcja $t \mapsto N(t)$ spełnia równanie

$$\frac{dN}{dt} = -\lambda N \quad \text{Rozumieć oczywiście należy pewne idealizacje które muszą być pożycone.}$$

Nie trudno zgadnąć że $N(t) = N_0 \exp(-\lambda t)$ $N_0 = N(0)$ ma interpretację początkowej liczby atomów promieniotwórczych.

(2)



$$\ddot{\varphi} = -\frac{g}{l} \sin(\varphi).$$

Wahadło - z drugiej zasady dynamiki Newtona wynika równanie opisujące funkcję

$$t \mapsto \varphi(t)$$

Równanie zawiera drugą pochodną, mówimy więc że jest drugiego rzędu

(3) Równanie falowe w jednym wymiarze (tzn na funkcję dwóch zmiennych) $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} \quad (t, x) \mapsto f(t, x)$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \quad v - \text{stała rzeczywista dodatnia (prędkość fali)}$$

łatwo stwierdzić, że $f(t, x) = \varphi(x + vt) + \psi(x - vt)$ jest ogólną postacią rozwiązania tego równania. φ, ψ to funkcje jednej zmiennej różniczkowalne przynajmniej dwukrotnie.

(4) Równanie Schrödingera $-\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \psi + V(x, y, z) \psi = -i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t}$ jest to równanie na funkcję

$$\mathbb{R}^4 \ni (x, y, z, t) \mapsto \psi(x, y, z, t) \in \mathbb{C}$$

zespółoną, drugiego rzędu, cząstkowe.

Równania z przykładów (1) i (2) to równania na funkcję jednej zmiennej rzeczywistej o wartościach rzeczywistych. (1) jest pierwszego rzędu a (2) drugiego. Równania różniczkowe na jedną lub wiele funkcji jednej zmiennej to **równania różniczkowe zwyczajne**.

Funkcjonuje też skrót

ODE
Ordinary $\uparrow$ Equation
Differential $\uparrow$

"wiele funkcji" oznacza, że wartości mogą być wektorowe

$$y: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$$

$$y^{(k)} = F(x, y, y', \dots, y^{(k-1)})$$

← równanie w postaci kanonicznej

$$G(x, y, y', \dots, y^{(k)}) = 0$$

← równanie w postaci uwikłanej

$$F: \mathbb{R}^{k+1} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$G: \mathbb{R}^{k+2} \rightarrow \mathbb{R}$$

Na G i F nakłada się pewne warunki w zależności od okoliczności.

Równanie 2 przykładów (2) i (3) to równanie na funkcję wielu zmiennych. Takie równanie nazywają się **częstkowe**.

83

PDE ← Equation
↑
Partial Differential

My będziemy zajmować się równaniami z wyższymi. Równanie częstkowe omawia się w ramach specjalnego wykładu monograficznego specjalistycznego lub studiów "sztuka po sztuce" w miarę potrzeby.

Najwięcej czasu poświęcimy równaniom pierwszego rzędu. Równanie wyższych rzędów zazwyczaj zamienia się na układ równań pierwszego rzędu wprowadzając niższe pochodne jako pomocnicze funkcje. Np. w przykładzie drugim możemy dodać funkcję ω - prędkości kątowej i mamy

$$\begin{cases} \dot{\varphi} = \omega \\ \dot{\omega} = -\frac{g}{l} \sin \varphi \end{cases} \leftarrow \text{układ równań pierwszego rzędu.}$$

Zanim zajmiemy się rozwiązywaniem równań musimy załatwić pewną kwestię techniczną.

CĄTKI Z FUNKCJI O WARTOŚCIACH WEKTOROWYCH

Niech X będzie przestrzenią Banacha skończonego wymiaru. Niech także $e = (e_1, \dots, e_n)$ będzie bazą X . Rozważamy $f: [a, b] \rightarrow X$ ciągłą. Korzystając z e piszemy

$$f(t) = f^1(t)e_1 + \dots + f^n(t)e_n$$

$$f(t) = f^1(t)e_1 + \dots + f^n(t)e_n$$

84

Całkę z f po odcinku $[a, b]$ nazywamy wektor $\int_a^b f(t) dt = \left(\int_a^b f^1(t) dt \right) e_1 + \dots + \left(\int_a^b f^n(t) dt \right) e_n$. Zauważmy że całka jest niezależna od

wyboru bazy: $g = (g_1, \dots, g_n)$ $e_i = \Lambda_i^j g_j$

$$f^i(t) e_i = f^i(t) \Lambda_i^j g_j = \tilde{f}^j(t) g_j$$

$$\tilde{f}^j(t) = f^i(t) \Lambda_i^j$$

$$\left(\int_a^b \tilde{f}^j(t) dt \right) g_j = \left(\int_a^b f^i(t) \Lambda_i^j dt \right) g_j = \left(\int_a^b f^i(t) dt \right) \underbrace{\Lambda_i^j g_j}_{e_i} = \left(\int_a^b f^i(t) dt \right) e_i$$

Całka z funkcji o wartościach wektorowych jest dobrze określona. Na przykład nieskończenie wymiarowy można rozszerzyć to pojęcie na dwa sposoby: (1) używając definicji całki Riemanna jako granicy uogólnionej sumy wypunktowanej $S(\mathcal{T}, f, \xi) =$

$$\sum_{i=1}^n f(\xi_i) d_i \quad \text{gdzie } d_i = t_i - t_{i-1} \text{ a relacje skierowanie mówi, że}$$

podział $\mathcal{T}'$ jest późniejszy od $\mathcal{T}$ jeśli maksymalna długość przedziału w podziale $\mathcal{T}'$ jest mniejsza niż w podziale $\mathcal{T}$. Definiuje działkę dla f ciągłych.

(2) Alternatywny sposób wykorzystuje pojęcie funkcjonalów liniowych. W skończenie wymiarowej przestrzeni całkujemy, po współrzędnych. Zauważmy, że jeśli ε jest bazy dualnej do e to

$$\int_a^b f^i(t) dt = \langle \varepsilon, \int_a^b f(t) dt \rangle \text{ z definicji.}$$

W nieskończenie wymiarowej przestrzeni Banacha nie mamy do

dyspozycji bazy i bazy dualnej, jednak nadal prawdziwe jest twierdzenie

Twierdzenie $(X, \|\cdot\|)$ p. Banacha, $f: [a, b] \rightarrow X$ ciągła

85

Istnieje dokładnie jeden element $y \in X$ taki że dla każdego funkcjonatu liniowego ciągłego φ zachodzi

$$\langle \varphi, y \rangle = \int_a^b \langle \varphi, f(t) \rangle dt$$

Wektor y nazywamy całką z f po $[a, b]$ i oznaczamy $\int_a^b f(t) dt$.

Równania różniczkowe zwyczajne rzędu 1.

Pisać będziemy dla ogólnej przestrzeni Banacha $(X, \|\cdot\|)$ a dowodzić czasami przy dodatkowych założeniach:

SŁOWNIK:

X - p. Banacha $x: \mathbb{R} \supset I \rightarrow X$ odwzorowanie (kmyśle) różniczkowalne, $x' = \dot{x} \in B(\mathbb{R}, X) \cong X$ tzn utożsamiamy $x'(t)$ z $x'(t)$.

Mamy więc $x: I \rightarrow X$ i $x': I \rightarrow X$

X
↓
optymalny

$F: I \times \emptyset \rightarrow X$

Równanie różniczkowe zwyczajne pierwszego rzędu:

$$(*) \quad \dot{x}(t) = F(t, x(t))$$

Jeśli $x: I \rightarrow X$ jest takie, że $\forall x \in I$ $(*)$ zachodzi to x nazywamy **rozwiązaniem**

Para (t_0, x_0) $t_0 \in I$, $x_0 \in \emptyset$ nazywamy **danymi początkowymi** albo **danymi Cauchy'ego**. Dane te wyznaczają warunek początkowy dla równania, tzn **warunek początkowy** to warunek aby rozwiązanie spełniało $x(t_0) = x_0$.