WYKŁAD 13

TW. CAUCHY'EGO O ISTNIENIU I JEDNOZNACZNOŚCI

15.04.2016

dyspozycji bazy i bazy dualnej, jednak nadal prawdziwe jest twierdzenie 85

TWIERDZENIE $(X, \|\cdot\|)$ p. Banacha, $f:[a,b]\longrightarrow X$ ciągła

Istnieje dokładnie jeden element $y\in X$ taki że dla każdego funkcjonału liniowego ciągłego φ zachodzi

$$\langle \varphi, y\rangle = \int_a^b \langle \varphi, f(t)\rangle \, dt$$

Wektor y nazywamy całką z f po $[a,b]$ i oznaczamy $\int_a^b f(t)\,dt$.

RÓWNANIA RÓŻNICZKOWE ZWYCZAJNE RZĘDU 1.

Pisać będziemy dla ogólnej przestrzeni Banacha $(X, \|\cdot\|)$ a dowodzić czasami przy dodatkowych założeniach:

SŁOWNIK:

X – p. Banacha $x: \mathbb{R}\supset I \longrightarrow X$ odwzorowanie (krzywe) różniczkowalne, $x' = \dot{x} \in B(\mathbb{R}, X) \simeq X$ tzn utożsamiamy $x'(t)1$ z $x'(t)$.
Mamy więc $x: I \longrightarrow X$ i $x': I \longrightarrow X$

$$X \supset \mathcal{O} \quad \text{otwarty}$$

$F: I \times \mathcal{O} \longrightarrow X$ Równanie różniczkowe zwyczajne pierwszego rzędu:

$$(*) \quad \dot{x}(t) = F(t, x(t))$$

Jeśli $x: I \longrightarrow X$ jest takie, że $\forall x \in I$ $(*)$ zachodzi to x nazywamy rozwiązaniem

Parę (t_0, x_0) $t_0\in I$, $x_0 \in \mathcal{O}$ nazywamy danymi początkowymi albo danymi Cauchy'ego. Dane te wyznaczają warunek początkowy dla równania, tzn warunek początkowy to warunek aby rozwiązanie spełniało $x(t_0) = x_0$.

Problem poszukiwania rozwiązania równania z danym warunkiem początkowym nazywamy zagadnieniem Cauchy'ego.

86

PRZYKŁAD Weźmy łatwe równanie postaci
$\dot{x}(t) = F(t)$ tzn F nie zależy od x. Wtedy rozwiązaniem zagadnienia Cauchy'ego z warunkiem $x(t_0)=x_0$ jest

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} F(s)\,ds$$

Podstawowym twierdzeniem w dziedzinie ODE jest tzw twierdzenie Cauchy'ego o istnieniu i jednoznaczności rozwiązania zagadnienia Cauchy'ego.

TWIERDZENIE: X - p.B, $\Theta \subset X$ otwarty $I =]a,b[\subset \mathbb{R}$ $F: I \times \Theta \to X$ jest ciągła i spełnia warunek Lipschitza względem drugiej zmiennej ze stałą $L>0$, $t_0 \in I$, $x_0 \in \Theta$

Istnieje $\varepsilon > 0$ taki że $]t_0-\varepsilon, t_0+\varepsilon[\subset I$ oraz jedyna funkcja $x:]t_0-\varepsilon, t_0+\varepsilon[\longrightarrow \Theta$ spełniająca

$$\forall t \in]t_0-\varepsilon, t_0+\varepsilon[\quad \dot{x}(t) = F(t, x(t))$$
$$x(t_0) = x_0$$

$\exists L>0 : \forall t \in I \quad \forall u,w \in \Theta \quad \| F(t,u) - F(t,w) \| \leq L \| u-w \|$

L nie zależy od t !!!

Przeprowadzimy oczywiście dowód tego twierdzenia, na razie przyjrzyjmy się szkicowi dowodu w prostym przypadku i spróbujmy zidentyfikować trudności.

87

SZKIC DOWODU DLA $X=\mathbb{R}$ $\quad x: I \to \mathbb{R} \quad F: I\times J \to \mathbb{R}$

$$\dot{x}(t)=F(t,x) \quad x(t_0)=x_0 \quad (*)$$

Załóżmy że x spełnia $(*)$ wtedy

$$x(t)=x_0+\int_{t_0}^{t}\dot{x}(s)\,ds = x_0+\int_{t_0}^{t}F(s,x(s))\,ds$$

Jeśli więc x spełnia $(*)$ to x spełnia też $x(t)=x_0+\int_{t_0}^{t}F(s,x(s))\,ds$. $\quad (**)$

Załóżmy teraz, że x spełnia $(**)$. Różniczkując i korzystając z podstawowego tw. rachunku różniczkowego i całkowego dostajemy

$$\dot{x}(t)=F(t,x(t)) \quad \text{i} \quad x(t_0)=x_0 \quad \text{czyli } x \text{ spełnia } (*)$$

Równanie różniczkowe $(*)$ i całkowe $(**)$ są więc równoważne. Rozwiązanie $(**)$ konstruujemy metodą kolejnych przybliżeń:

$$\varphi_0(t)=x_0\,,\quad \varphi_1(t)=x_0+\int_{t_0}^{t}F(s,\varphi_0(s))\,ds\,,\ \dots,\ \varphi_n(t)=x_0+\int_{t_0}^{t}F(s,\varphi_{n-1}(s))$$

Należałoby wykazać że

$$\lim_{n\to\infty}\varphi_n(t)\stackrel{?}{=}\varphi(t) \quad \text{i zbieżność jest jednostajna, wtedy}$$

$$\varphi(t)=\lim_{n\to\infty}\varphi_n(t)=x_0+\lim_{n\to\infty}\int_{t_0}^{t}F(s,\varphi_{n-1}(s))\,ds \stackrel{?}{=} x_0+\int_{t_0}^{t}F(s,\varphi(s))\,ds$$

i φ spełnia $(**)$ czyli jest rozwiązaniem $(*)$

Są oczywiście trudności: czy φ_n określone są na wspólnym odcinku niezerowej długości, czy wartości φ_n nie „wystają" poza J, czy φ_n jest jednostajnie zbieżny, czy wolno wchodzić z granicą pod całkę...

88

PRZYKŁAD Opisaną w szkicu dowodu metodę można użyć też w praktyce:

$$\dot{x} = x \quad x(0)=\alpha \quad \varphi(0)=\alpha \quad \varphi_1(t) = \alpha + \int_0^t \alpha\, ds = \alpha + \alpha t \quad \varphi_2(t) = \alpha + \int_0^t (\alpha + \alpha s)\, ds =$$

$$= \alpha + \alpha t + \frac{1}{2}\alpha t^2, \ldots, \varphi_n(t) = \alpha \sum_{k=0}^{n} \frac{t^k}{k!} \qquad \varphi(t) = \alpha \exp(t).$$

DOWÓD: Podając szkic dowodu stwierdziliśmy, że

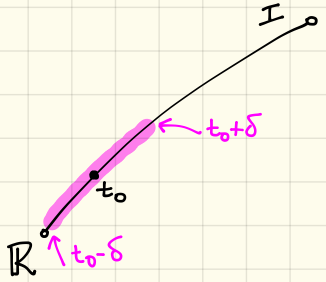
$$\begin{cases} \dot{x} = F(t,x) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \quad \text{jest równoważne} \quad x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} F(t, x(s))\, ds$$

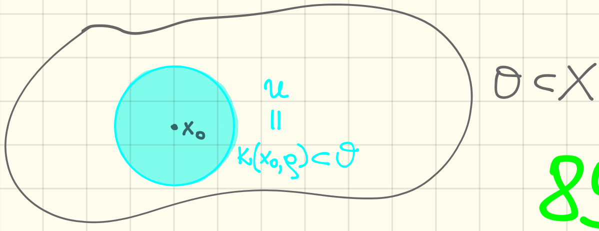
(*) (* * *) (* *)

Równanie (* *) jest postaci $x = \Phi(x)$ dla odwzorowanie

$$\Phi : x \longmapsto \Phi(x)(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} F(t, x(s))\, ds$$

Φ jest odwzorowaniem na jakiejś przestrzeni funkcyjnej. (* * *) jest równaniem na punkt stały odwzorowania Φ. W tej sytuacji dobrze by było skorzystać z zasady Banacha. W tym celu trzeba odpowiednio określić przestrzeń na której działa Φ (ma być zupełna przestrzeń metryczna) i sprawdzić, czy Φ jest odwzorowaniem zbliżającym. Kluczowe jest tu wybranie odpowiedniego odcinka parametru na którym określone jest x.





89

$J = \,]t_0-\delta, t_0+\delta[\, \subset I$

$$D = \sup_{\substack{s\in \bar{J} \\ v\in\bar{\mathcal{U}}}} \| F(s,v)\|$$ ← jeśli $\dim X<\infty$ to D jest skończone, bo funkcja ciągła na zbiorze zwartym... Jeśli jednak $\dim X=\infty$ to argument musi być inny:

$$\|F(s,v)-F(t_0,x_0)\| \leq \|F(s,v)-F(s,x_0)\| + \|F(s,x_0)-F(t_0,x_0)\|$$

$$\leq L\underbrace{\|v-x_0\|}_{\leq\varrho} + \underbrace{\|F(s,x_0)\|}_{\leq \sup_{\sigma\in\bar{J}}\|F(\sigma,x_0)\|} + \|F(t_0,x_0)\| \leq L\varrho + \sup_{\sigma\in\bar{J}}\|F(s,x_0)\| + \|F(t_0,x_0)\|$$

← f. ciągła na zb. zwartym $\bar{J}$...

Obcinamy dziedzinę $x: J \longrightarrow \mathcal{U}$ jeszcze bardziej biorąc $H=[t_0-\varepsilon, t_0+\varepsilon]$ dla ε takiego, że

$$H\subset\bar{J}, \quad \varepsilon<\frac{1}{L}, \quad \varepsilon\leq\frac{\varrho}{D}$$

żeby Φ było zbliżające

żeby Φ miało obraz gdzie trzeba

Dziedzina Φ: $\mathcal{Z}_H = C(H,\bar{\mathcal{U}})$ $\mathcal{Z}_H$ jest domkniętym zbiorem w przestrzeni Banacha $C(H,X)$ z normą sup, tzn

$\|\gamma\| = \sup_{s\in H}\|\gamma(s)\|$. Dokładniej $\mathcal{Z}_H = \bar{K}(\gamma_0,\varrho)$

$\gamma_0(s)=x_0$ promień $\mathcal{U}$.

$\Phi : Z_H \longrightarrow Z_H$? Czy obraz $\Phi \subset Z_H$?

90

$$\|\Phi(x) - x_0\| = \left\| \int_{t_0}^{t} F(s, x(s))\, ds \right\| \leqslant |t - t_0| \sup_{\substack{s \in H \\ v \in \overline{U}}} \|F(s,v)\| \leqslant$$

$$\varepsilon \cdot D \leqslant \frac{\rho}{D} \cdot D = \rho$$

Czy Φ jest zbliżające

$$\| \Phi(\gamma_1)(t) - \Phi(\gamma_2)(t) \| = \left\| \int_{t_0}^{t} \big(F(s, \gamma_1(s)) - F(s, \gamma_2(s))\big)\, ds \right\| \leqslant$$

$$\leqslant \int_{t_0}^{t} \| F(s, \gamma_1(s)) - F(s, \gamma_2(s)) \|\, ds \leqslant L \int_{t_0}^{t} \| \gamma_1(s) - \gamma_2(s) \|\, ds \leqslant$$

$$L \cdot \varepsilon \sup_{s \in H} \| \gamma_1(s) - \gamma_2(s) \| = L \cdot \varepsilon \| \gamma_1 - \gamma_2 \| < \| \gamma_1 - \gamma_2 \|$$

i.e $\| \Phi(\gamma_1) - \Phi(\gamma_2) \| < \| \gamma_1 - \gamma_2 \|$

Z zasady Banacha wynika, że Φ ma dokładnie jeden punkt stały w Z_H

$x : [t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon] \longrightarrow \mathcal{U} \subset \mathcal{V} \subset X \qquad x(t_0) = x_0 \qquad \dot{x}(t) = F(t, x(t))$

x jest ciągłe, ale ponieważ jest postaci $x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} F(s, x(s))\, ds$ to jest też różniczkowalne (ciągła funkcja podcałkowa)

■

UWAGI RÓŻNE:

(1) Z jednoznaczności rozwiązania na $[t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon]$ wynika globalna jednoznaczność. Weźmy $t_1 \in [t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon]$ i $x_1 = x(t_1)$ Rozważając

zagadnienie Cauchy'ego $\dot{x}(t) = F(t, x(t))$ $x(t_1) = x_1$ dostaniemy ε' i rozwiązanie $y: [t_1-\varepsilon', t_1+\varepsilon'] \longrightarrow \Theta$, które na przecięciu odcinków $[t_1-\varepsilon', t_1+\varepsilon'] \cap [t_0-\varepsilon, t_0+\varepsilon]$ musi być zgodne z x. W ten sposób rozwiązanie można przedłużać, nie zawsze na całe I.

91

(2) Zbadamy zależność rozwiązania od warunków początkowych i od F, tzn interesuje nas jak bardzo zmieni się rozwiązanie jeśli odrobinę przesuniemy punkt początkowy albo trochę zmodyfikujemy samo rozwiązanie. To drugie pytanie jest istotne np dla rozwiązywania problemów w sposób przybliżony: zamiast równania trudnego rozwiązujemy łatwiejsze, ale niewiele różniące się od trudnego.

Weźmy dwa równania dane przez F_1 i F_2 oraz dane początkowe x_1 i x_2 w t_0. Weźmy też rozwiązania f i g na wspólnym odcinku $[t_0-\varepsilon, t_0+\varepsilon]$. f i g są punktami stałymi Φ_1 i Φ_2. Punkty te można uzyskać jako granice $f_n = \Phi_1^n(f_0)$, $g_n = \Phi_2^n(g_0)$ dla dowolnych f_0 i g_0.

$$\|f_1(t) - g_1(t)\| \leq \|x_1 - x_2\| + \int_{t_0}^{t} \|F_1(s, f_0) - F_2(s, g_0)\| ds \leq$$

$$\|x_1 - x_2\| + \int_{t_0}^{t} \|F_1(s, f_0) - F_1(s, g_0)\| + \|F_1(s, g_0) - F_2(s, g_0)\| ds \leq$$

$$\|x_1 - x_2\| + |t - t_0| L_1 \|f_0 - g_0\| + |t - t_0| \|F_1 - F_2\|$$

$$\|f_2(t) - g_2(t)\| \leq \|x_1 - x_2\| + \int_{t_0}^{t} \|F_1(s, f_1(s)) - F_1(s, g_1(s))\| + \|F_1(s, g_1) - F_2(s, g_1)\| ds$$

$$\leq \|x_1 - x_2\| + \int_{t_0}^{t} L_1 \|f_1(s) - g_1(s)\| ds + |t - t_0| \|F_1 - F_2\|$$

$$\|f_2(t)-g_2(t)\| \leq \|x_1-x_2\| + \int_{t_0}^{t} \|F_1(s,f_1(s)) - F_1(s,g_1(s))\| + \|F_2(s,g_1) - F_2(s,g_1)\| \, ds$$

92

$$\leq \|x_1-x_2\| + \int_{t_0}^{t} L_1 \|f_1(s)-g_1(s)\| ds + |t-t_0| \|F_1-F_2\|$$

$$\leq \|x_1-x_2\| + \int_{t_0}^{t} L_1 \left(\underline{\|x_1-x_2\| + |s-t_0| L_1 \|f_0-g_0\| + |s-t_0| \|F_1-F_2\|} \right) ds +$$

$$\|t-t_0\| \|F_1-F_2\| = \|x_1-x_2\| \left\{1+L_1|t-t_0|\right\} + L_1^2 \frac{1}{2}(t-t_0)^2 \|f_0-g_0\| + \|F_1-F_2\| \times \left\{ |t-t_0| + \frac{1}{2}|t-t_0|^2 \right\}$$

$\vdots$ itd

$$\|f_m(t)-g_m(t)\| \leq \|x_1-x_2\| \left(1+L_1|t-t_0| + \dots + \frac{1}{m!} L_1^n |t-t_0|^n\right) + \frac{L_1^n}{m!} |t-t_0|^n \|f_0-g_0\|$$

$$+ \left(\|t-t_0\| + \dots + \frac{1}{m!}|t-t_0|^n\right) \|F_1-F_2\| \leq$$

$$\leq \|x_1-x_2\| \exp\left(L_1|t_0-t|\right) + \frac{L_1^n |t-t_0|^n}{m!} \|f_0-g_0\| + \|F_1-F_2\| \times \left[\exp(|t-t_0|)-1\right]$$

$$\Big\downarrow n \to \infty$$

$$\|f(t)-g(t)\| \leq \|x_1-x_2\| \exp(L|t-t_0|) + \|F_1-F_2\| \left[\exp(|t-t_0|)-1\right]$$

$$\Big\downarrow \sup_{t \in [t_0-\varepsilon, t_0+\varepsilon]}$$

$$\|f-g\| \leq \|x_1-x_2\| \exp(L_1\varepsilon) + \|F_1-F_2\| \left[\exp(\varepsilon)-1\right]$$

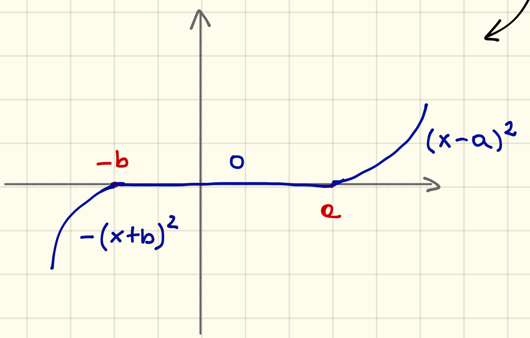
const   const

Nieduża zmiana w. pocz. powoduje „niedużą" zmianę rozwiązania. Podobnie nieduże zmiane F.

„Niedużość" tej zmiany jest oczywiście względne - wykładniczo rośnie z parametrem. W każdym razie zależność od warunków początkowych i od F jest ciągła.

PRZYKŁAD:

Rozważmy $\dot{x} = 2\sqrt{|x|}$ $\quad x(0)=0$. Prawa strona nie spełnia warunku Lipschitza w otoczeniu 0, więc twierdzenie nie ma zastosowanie, jednak rozwiązanie istnieje - tracimy jedynie jednoznaczność: Weźmy $a,b>0$ i $x_{ab}: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$



poza liniowymi...

PRZYKŁAD $X=\mathbb{R}$ Jedyne równanie, które rzeczywiście potrafimy rozwiązywać to równanie o zmiennych rozdzielonych:

$$\dot{x} = f(x)g(t) \qquad \frac{dx}{dt} = f(x)g(t) \qquad \frac{dx}{f(x)} = g(t)dt$$

niech F będzie pierwotna do $\frac{1}{f}$ i G pierwotna do g. Rozwiązanie jest zadane w sposób uwikłany równaniem

$$F(x) = G(t) + \underset{\text{stała}}{C}$$

Stałą dobieramy w zależności od w. początkowych.

Resztę równań staramy się sprowadzić jakoś do postaci równań o zmiennych rozdzielonych. Na ćwiczeniach będą Państwo dyskutować całą botanikę równań pierwszego rzędu (i trochę drugiego) My za to zajmiemy się równaniami liniowymi.

94