WYKŁAD 14

RÓWNANIA RÓŻNICZKOWE LINIOWE

REZOLWENTA

19.04.2016

RÓWNANIA RÓŻNICZKOWE LNIOWE (UKŁADY RÓWNAŃ)

X - przestrzeń Banacha

Rozważamy równania postaci $\dot{x}(t) = A(t)x(t) + b(t)$ gdzie

$A : I \longrightarrow B(X)$ $b : I \longrightarrow X$, tzn w notacji $\dot{x} = F(t,x)$ mamy

$F(t,x) = A(t)x + b(t)$ Mieliśmy $F : I \longrightarrow \Theta$ ← tu zakładamy $\Theta = X$

Zakładamy oczywiście, że A i b są ciągłe. Sprawdźmy jak się rzecz ma z tw. Cauchy'ego o istnieniu i jednoznaczności

$$\| F(t,x) - F(t,y) \| = \| A(t)x + b(t) - A(t)y - b(t) \| = \| A(t)(x-y) \|$$

$\leqslant \| A(t) \| \| x - y \|$ Weźmy teraz $[\alpha, \beta] \subset I$ wtedy

$$L = \sup_{s \in [\alpha,\beta]} \| A(t) \| < \infty \quad \text{i} \quad \| F(t,x) - F(t,y) \| \leqslant L \| x - y \|$$

F spełnia więc warunek Lipschitza ze względu na drugą zmienną na dowolnym odcinku $[\alpha, \beta] \subset I$. Z twierdzenie Cauchy'ego wiemy, że dla każdego t_0, x_0 istnieje ε taki, że na odcinku $]t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon[$ istnieje dokładnie jedno rozwiązanie zagadnienia cauchy'ego. Ten ε dobieraliśmy tak żeby

$\varepsilon \cdot L < 1$, $\varepsilon < \frac{\rho}{D}$ gdzie ρ to promień kuli w której leży $F(t,x)$ dla x w pobliżu x_0 i t w pobliżu t_0. Możemy w naszym przypadku wziąć $B = \sup_{s \in [\alpha,\beta]} \| b(s) \|$, $\rho = L \cdot \| x_0 \| + B$ $D = \sup_{\substack{s \in [\alpha,\beta] \\ \|x - x_0\| < \rho}} \| F(s,x) \|$

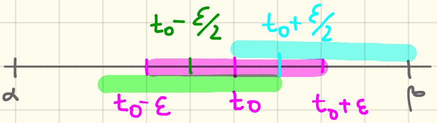
$\varepsilon = \frac{1}{L+1}$ wtedy $\varepsilon \cdot L = \frac{L}{L+1} < 1$

$$D = \sup_{\substack{s \in [\alpha,\beta] \\ x \in \bar{K}(x_0,\rho)}} \| A(t)x + b(t) \| \leq L(\|x_0\| + \rho) + B$$

$$\frac{\rho}{D} \geq \frac{L\|x_0\| + B}{L(\|x_0\| + \rho) + B} = \frac{L\|x_0\| + B}{L\|x_0\| + L(L\|x_0\| + B) + B} =$$

$$= \frac{L\|x_0 + B\|}{(L\|x_0\| + B)(L+1)} = \frac{1}{L+1} = \varepsilon$$

Zauważmy, że ε zależy jedynie od L a nie zależy explicite od t_0 i x_0. Oznacza to, że rozwiązanie można przedłużać:



Rozwiązanie zielone $y:]t_0 - \frac{3}{2}\varepsilon_0, t_0 + \frac{1}{2}\varepsilon[\longrightarrow X$ uzyskane jest dla danych początkowych
$$\left(t_0 - \varepsilon/2, \; y_0 = x(t_0 - \varepsilon/2)\right)$$

Rozwiązanie niebieskie
$z:]t_0 - \frac{1}{2}\varepsilon, t_0 + \frac{3}{2}\varepsilon[\longrightarrow X$ uzyskane jest dla danych $\left(t_0 + \varepsilon/2, \; x(t_0 + \varepsilon/2)\right)$

Z jednoznaczności rozwiązania wynika, że $x(t)$ i $y(t)$ muszą zgadzać się na $]t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon/2[$ zaś $x(t)$ i $z(t)$ na $]t_0 - \varepsilon/2, t_0 + \varepsilon[$. Ostatecznie tworzą więc one jedno rozwiązanie na $]t_0 - \frac{3}{2}\varepsilon, t_0 + \frac{3}{2}\varepsilon[$. Podobnie przedłużać można dalej aż do wypełnienia całego przedziału $]\alpha, \beta[$.

Przedział $[\alpha, \beta]$ był dowolny zawarty w I. Wybierając różne $[\alpha, \beta]$ konstruując rozwiązanie i korzystając z jednoznaczności na przecięciach uzyskamy ostatecznie jednoznaczne rozwiązanie na całym I.

Równanie z $b(t)=0$ nazywamy równaniem jednorodnym RJ. Równanie z $b(t)\neq 0$ nazywamy równaniem niejednorodnym RN zaś samo $b(t)$ nazywamy niejednorodnością.

Ustalmy teraz $t_0 \in I$. Niech $x(t)$, $y(t)$ będą rozwiązaniami równania niejednorodnego z danymi początkowymi x_0, y_0 odpowiednio. Wtedy

$$\dot{x}(t)-\dot{y}(t) = A(t)x(t)+b(t) - A(t)y(t) - b(t) = A(t)\big(x(t)-y(t)\big)$$

w t_0 $\quad x(t_0)-y(t_0) = x_0 - y_0$

Różnica rozwiązań RN jest rozwiązaniem RJ. Suma rozwiązania RJ i rozwiązania RN jest rozwiązaniem RN. Jeśli x jest rozwiązaniem RN z niejednorodnością b_1 a y z niejednorodnością b_2 to $x+y$ jest rozwiązaniem RN z niejednorodnością b_1+b_2.

Rozwiązania RJ dla różnych warunków początkowych tworzą podprzestrzeń wektorową w $C^1(I,X)$. Rozwiązanie jest wyznaczone jednoznacznie przez wartość $x_0=x(t_0)$ zatem istnieje bijekcja między X a zbiorem rozwiązań. Mamy więc rodzinę rozwiązań RJ parametryzowaną warunkami początkowymi. Wiadomo, że kombinacji liniowej warunków początkowych odpowiada kombinacja liniowa rozwiązań. W przypadku skończeniewymiarowego X można więc znaleźć bazę rozwiązań korzystając z wybranej bazy X. Wykorzystamy to później. Wiadomo zatem, że dla $\dim X < \infty$ wymiar przestrzeni rozwiązań jest taki jak wymiar X.

Zajmiemy się teraz równaniem jednorodnym: $\dot{x} = A(t)x$
Dla warunków początkowych (t_0, x_0) mamy rozwiązanie zagadnienia $\dot{x} = A(t)x$ $x(t_0)=x_0$. Możemy zatem trójce

$$(x_0, t_0, t) \text{ przypisać } u(x_0, t_0, t) = x(t)$$

Rezolwentą równania $\dot{x} = A(t)x(t)$ nazywamy odwzorowanie

$$R(t, t_0) : X \longrightarrow X \qquad R(t,t_0)(x_0) = u(x_0, t_0, t)$$

Odwzorowanie to pozwala wspólnie omawiać wszystkie rozwiązania. Konkretne rozwiązanie uzyskujemy aplikując rezolwentę do warunków początkowych. Znajomość rezolwenty oznacza znajomość ogólnego rozwiązania równania. Własności rezolwenty zawarte są w poniższym twierdzeniu

TWIERDZENIE (Własności rezolwenty)

(1) $R(t,t_0)$ jest liniowe
(2) $R(t_0,t_0) = \mathbb{1}_X$
(3) $R(t,s)R(s,t_0) = R(t,t_0)$
(4) $R(t,t_0) \in B(X)$
(5) $I \ni t \longmapsto R(t,t_0) \in B(X)$ jest różniczkowalną krzywą spełniającą równanie

$$\frac{d}{dt} R(t,t_0) = A(t) R(t,t_0)$$

DOWÓD:

(1) Mamy $\underbrace{u(x_0, t_0, t) = x(t)}_{\text{rozwiązanie dla } (t_0, x_0)}$ i $u(y_0, t_0, t) = y(t)$ rozwiązanie dla y_0

Wtedy $\alpha x(t)+\beta y(t)$ jest, jak łatwo sprawdzić rozwiązaniem RJ:

$$\frac{d}{dt}(\alpha x+\beta y)=\alpha\dot{x}+\beta\dot{y}=\alpha A(t)x+\beta A(t)y=A(t)(\alpha x+\beta y) \text{ dla } \alpha x_0+\beta y_0$$

zatem z definicji $u(\alpha x_0+\beta y_0, t_0, t)=\alpha x(t)+\beta y(t)=\alpha u(x_0,t_0,t)+\beta u(x_0,t_0,t)$
z liniowości u względem pierwszego argumentu wynika liniowość $R(t,t_0)$

$$R(t,t_0)(\alpha x_0+\beta y_0)=u(\alpha x_0+\beta y_0, t_0,t)=\alpha u(x_0,t_0,t)+$$
$$\beta u(y_0,t_0,t)=\alpha R(t,t_0)x_0+\beta R(t,t_0)y_0$$

(2) $R(t_0,t_0)x_0=u(x_0,t_0,t_0)=x(t_0)=x_0$ i.e. $R(t_0,t_0)=1\!\!1_X$

(3) $\underbrace{R(t,s)R(s,t_0)}\,x_0=R(t,s)u(x_0,t_0,s)=R(t,s)x(s)=$

$=u(x(s),s,t)=y(t)=$ gdzie $y(t)$ spełnia $y(s)=x(s)$
$y=x$ bo warunki początkowe $(s,x(s))$ są na tej samej krzywej co (t_0,x_0), zatem

$$R(t,s)R(s,t_0)=R(t,t_0)$$

$=x(t)=\underbrace{R(t,t_0)}\,x_0$

(4) i (5) Wiadomo, że $A(t)\in B(X)$. Rozważmy równanie liniowe na krzywą $I\ni t\longmapsto r(t)\in B(X)$

$$\dot{r}=A(t)r \quad \text{z warunkiem} \quad r(t_0)=1\!\!1.$$

Równanie to ma jednoznaczne rozwiązanie (jest to równanie liniowe w przestrzeni $B(X)$). Biorąc ustalone $x_0\in X$ możemy zapisać krzywą $x(t)=r(t)x_0$. Łatwo sprawdzić, że spełnia ona wyjściowe równanie $\dot{x}(t)=\dot{r}(t)x_0=A(t)rx_0=A(t)x$ $\quad x(t_0)=x_0$.

z definicji więc $\underset{\overset{\shortparallel}{r(t)x_0}}{x(t)} = R(t,t_0)x_0$. Zachodzi to $\forall x_0$ zatem $r(t) = R(t,t_0)$

100

Pokazuje to (5) ale też (4). ■

Problem rozwiązywania równania $\dot{x} = A(t)x$ można zastąpić problemem rozwiązywania $\dot{r}(t) = A(t)r(t)$ z warunkiem $r(t_0) = \mathbb{1}_X$. Różnica niby nie jest taka duża, ale jednak to drugie równanie jest zbadać nieco łatwiej. Można zastosować metodę kolejnych przybliżeń znaną z dowodu tw. Cauchy'ego. Weźmy więc

$$r_0(t) = \mathbb{1}_X \qquad r_1(t) = \mathbb{1}_X + \int_{t_0}^{t} A(s)\mathbb{1}_X\, ds = \mathbb{1}_X + \int_{t_0}^{t} A(s)\, ds$$

$$r_2(t) = \mathbb{1}_X + \int_{t_0}^{t} A(s) r_1(s)\, ds = \mathbb{1}_X + \int_{t_0}^{t} A(s_1)\left[\mathbb{1}_X + \int_{t_0}^{s_1} A(s_2)\, ds_2\right] ds_1 =$$

$$= \mathbb{1}_X + \int_{t_0}^{t} A(s)\, ds + \int_{t_0}^{t}\int_{t_0}^{s_1} A(s_1)A(s_2)\, ds_2\, ds_1$$

$$r_3(t) = \mathbb{1}_X + \int_{t_0}^{t} A(s)\, ds + \int_{t_0}^{t}\int_{t_0}^{s_1} A(s_1)A(s_2)\, ds_2\, ds_1 + \int_{t_0}^{t}\int_{t_0}^{s_1}\int_{t_0}^{s_2} A(s_1)A(s_2)A(s_3)\, ds_1\, ds_2\, ds_3$$

$\vdots$

$$r_n(t) = \mathbb{1}_X + \sum_{k=1}^{n} \int_{t_0}^{t}\int_{t_0}^{s_1} \cdots \int_{t_0}^{s_{m-1}} A(s_1) \ldots A(s_n)\, ds_1 \ldots ds_m$$

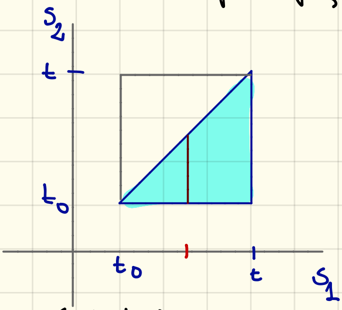
Wyraz powyższej sumy zanalizujmy na przykładzie wyrazu drugiego:

$$\int_{t_0}^{t}\int_{t_0}^{s_1} A(s_1)A(s_2)\, ds_2\, ds_1$$

$$\int_{t_0}^{t}\int_{t_0}^{s_1} A(s_1)A(s_2)\,ds_2\,ds_1$$

Jest to całka iterowana, którą rozpatrywać można jako całkę podwójną po trójkącie

10L



Gdyby operatory $A(s_1)$ i $A(s_2)$ były przemienne, można by zapisać tę całkę jako pół całki po kwadracie

$$\frac{1}{2}\int_{t_0}^{t}\int_{t_0}^{t} A(s_1)A(s_2)\,ds_1\,ds_2 = \left(\int_{t_0}^{t} A(s)\,ds\right)^2$$

i ogólnie $$\frac{1}{m!}\int_{t_0}^{t}\int_{t_0}^{t}\cdots\int_{t_0}^{t} A(s_1)\cdots A(s_n)\,ds_1\ldots ds_m = \left(\int_{t_0}^{t} A(s)\,ds\right)^m$$

Jeśli operatory A w różnych chwilach czasu nie są przemienne – obowiązuje zapis ogólny, tzn

$$R(t,t_0) = \mathbb{1} + \sum_{k=1}^{\infty} A_k(t) \qquad A_k(t) = \int_{t_0}^{t}\int_{t_0}^{s_1}\cdots\int_{t_0}^{s_k} A(s_1)\ldots A(s_k)\,ds_k\ldots ds_1$$

PRZYKŁAD (WAŻNY!)

Jeśli $A(t) = A$ nie zależy od czasu to $A_k = \frac{1}{k!}\left(\int_{t_0}^{t} A\,ds\right)^k = \frac{1}{k!}A^k(t-t_0)^k$

$$R(t,t_0) = \mathbb{1} + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k!}A^k(t-t_0)^k = \exp\left(A(t-t_0)\right)$$

Gdzie korzystamy z definicji $\exp(T) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} T^n \quad (T^0 = \mathbb{1})$

102

Rozwiązanie równania liniowego o stałych współczynnikach jest postaci

$$x(t) = \exp\big(A(t-t_0)\big)x_0$$

W przypadku $\dim X < \infty$ te rzeczy należy umieć liczyć! Na ten temat będzie cały wykład.

Załóżmy teraz, że $\dim X = n < \infty$

Załóżmy także, że znaleźliśmy bazę przestrzeni rozwiązań. Baza ta nazywa się fundamentalny układ rozwiązań. Oznaczmy te rozwiązania $x_1(\cdot), \dots, x_n(\cdot)$. Wybierając dodatkowo bazę $e = (e_1, \dots, e_n)$ w X możemy rozwiązania zapisać we współrzędnych

$$x_i(t) = x_i^1(t)e_1 + \dots + x_i^n(t)e_n \qquad [x_i(t)]^e = \begin{bmatrix} x_i^1(t) \\ \vdots \\ x_i^n(t) \end{bmatrix}$$

Wyznacznik $W(t) = \det \begin{bmatrix} x_1^1(t) & \cdots & x_n^1(t) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1^n(t) & \cdots & x_n^n(t) \end{bmatrix}$ nazywa się Wrońskianem fundamentalnego układu rozwiązań.

1776 - 1853

Józef Maria Hoene Wroński