WYKŁAD 16,17

RÓWNANIA LINIOWE – CD, RÓWNANIA LINIOWE WYŻSZEGO RZĘDU

26 kwietnie 2016, 29 kwietnia

analityczna na $\mathbb{C}$

DOKOŃCZENIE POPRZEDNIEGO WYKŁADU:

TWIERDZENIE Niech $f(\lambda)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n\lambda^n$ będzie funkcją zdefiniowaną szeregiem o nieskończonym promieniu zbieżności. Niech także $w(\lambda)$ będzie niezerowym wielomianem. Istnieją wówczas funkcja $g(\lambda)=\sum_{n=0}^{\infty} b_n\lambda^n$ i wielomian $r(\lambda)$, $\deg r < \deg w$ taki, że

102

(*) $f(\lambda)=g(\lambda)w(\lambda)+r(\lambda)$. Promień zbieżności $\sum b_n\lambda^n$ jest nieskończony.

ANALIZA: Zauważmy, że jeśli (*) zachodzi to $[f(\lambda)-r(\lambda)]=g(\lambda)w(\lambda)$. Można powiedzieć, że $f-r$ jest podzielne przez w. Jakie są „kryteria podzielności" funkcji przez wielomian? Zachodzi lemat

LEMAT: Niech φ jest funkcją ... i $w(\lambda)=(\lambda-\lambda_1)^{k_1}\ldots(\lambda-\lambda_m)^{k_m}$ wielomianem. Wówczas równoważne są warunki

(1) $\varphi(\lambda)=w(\lambda)\psi(\lambda)$ i ψ jest funkcją zadaną szeregiem potęgowym o nieskończonym promieniu zbieżności

(2) $\forall i\in 1\ldots m \quad \varphi^{(j)}(\lambda_i)=0$ dla $j<k_i$

DOWÓD: (2) ⇒ (1) Z (2) wynika że rozwinięcie funkcji φ wokół $z=\lambda_i$ ma postać

$$\varphi(z)=a_{k_i}(z-\lambda_i)^{k_i}+a_{k_i+1}(z-\lambda_i)^{k_i+1}+\ldots=(z-\lambda_i)^{k_i}\left(\sum_{n=0}^{\infty}a_{k_i+n}(z-\lambda_i)^n\right)$$

Wobec tego $\frac{\varphi(z)}{(z-\lambda_i)^{k_i}}$ jest funkcją analityczną na $\mathbb{C}$, a $\frac{\varphi(z)}{w(z)}$ jest funkcją analityczną na otoczeniu wszystkich λ_i. Kwestia analityczności na $\mathbb{C}$ wymaga przeprowadzenia rozważań z dziedziny analizy zespolonej i na razie ten problem opuszczamy.

(1) => (2) $\varphi(z) = \psi(z)\omega(z)$

$$\varphi'(z) = \psi'(z)\omega(z) + \psi(z)\omega'(z) \quad z=\lambda_i \quad \dots = 0$$

$$\vdots$$

$$\varphi^{(n)}(z) = \sum_{l=0}^{n} \binom{n}{l} \psi^{(l)}(z)\, \underbrace{\omega^{(n-l)}(z)}_{z=\lambda_i,\ \dots = 0}$$

Korzystamy z reguły Leibniza i faktu, że $\omega^{(j)}(\lambda_i) = 0$ dla $j = 0, \dots, k_i - 1$ ■

DOWÓD TWIERDZENIA: Niech $\omega(z) = (z-\lambda_1)^{k_1} \cdots (z-\lambda_m)^{k_m}$.

$\deg \omega = k_1 + \dots + k_m =: d$

Przestrzeń wielomianów nad $\mathbb{C}$ stopnia nie większego niż $d-1$ jest d-wymiarowa. Oznaczmy tę przestrzeń V. Formy liniowe $V \ni v \xmapsto{\alpha_i^j} v^{(j)}(\lambda_i)$ dla $i = 1 \dots m$, $j < k_i - 1$ są liniowo niezależne. Jest ich d, więc tworzą bazę V^*. Wartości tych form na wielomianie z V określają ten wielomian jednoznacznie, tzn. istnieje dokładnie jeden wielomian $r \in V$ taki, że $\alpha_i^j(r) = \varphi^{(j)}(\lambda_i)$. Oznacza to, że

$\varphi - r$ jest podzielny przez ω według poprzedniego lematu ■

UZMIENNIANIE STAŁEJ

Wiadomo już, że przestrzeń rozwiązań równania liniowego jednorodnego jest przestrzenią wektorową. Łatwo też stwierdzić, że jeśli x_1, x_2 są rozwiązaniami równania niejednorodnego to $x_1 - x_2$ jest rozwiązaniem równania jednorodnego:

$$\dot{x}_1 - \dot{x}_2 = Ax_1 + b - (Ax_2 + b) = A(x_1 - x_2)$$

Stąd wniosek że rozwiązanie równanie niejednorodnego tworzą p. afiniczną modelowaną na rozwiązaniach RJ. Dalej oznacza to że wystarczy znać dowolne jedno rozwiązanie RN i ogólne rozwiązanie RJ. Znając jeden punkt prz. aff. każdy inny znajdziemy dodając elementy p. modelowej: $a = a_0 + v$ zatem

$$RORN = RSRN + RORJ$$

rozwiązanie ogólne równania jednorodnego

Rozwiązanie ogólne równanie niejednorodnego

Rozwiązanie szczególne równanie niejednorodnego

Istnieje uniwersalna metoda znajdowania RSRN zwana uzmiennianiem stałej. Zacznijmy od przykładu:

PRZYKŁAD: $\begin{bmatrix}\dot{x}\\ \dot{y}\end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix}3 & -1\\ 1 & 1\end{bmatrix}}_{B}\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}t\\ 1\end{bmatrix}$ $\qquad e^{tB} = e^{2t}\begin{bmatrix}t+1 & -t\\ t & -t+1\end{bmatrix}$

stały wektor

RORJ: $\begin{bmatrix}x(t)\\ y(t)\end{bmatrix} = e^{2t}\begin{bmatrix}t+1 & -t\\ t & -t+1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}c_x\\ c_y\end{bmatrix}$

Metoda poszukiwania rozwiązania polega na zaproponowaniu RSRN w postaci

$$\begin{bmatrix}x(t)\\ y(t)\end{bmatrix} = e^{tB}\begin{bmatrix}c_x(t)\\ c_y(t)\end{bmatrix}$$

stałe zastępujemy przez funkcje dlatego metoda nazywa się uzmiennianie stałych

Taką postać wstawiamy do równania niejednorodnego

$$\frac{d}{dt}\left(e^{tB}\begin{bmatrix}c_x(t)\\ c_y(t)\end{bmatrix}\right) = B\left(e^{tB}\begin{bmatrix}c_x(t)\\ c_y(t)\end{bmatrix}\right) + \begin{bmatrix}t\\ 1\end{bmatrix}$$

$$Be^{tB}\begin{bmatrix}c_x\\ c_y\end{bmatrix} + e^{tB}\begin{bmatrix}\dot{c}_x\\ \dot{c}_y\end{bmatrix} = Be^{tB}\begin{bmatrix}c_x\\ c_y\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}t\\ 1\end{bmatrix}$$

$$e^{tB}\begin{bmatrix}\dot{c}_x\\ \dot{c}_y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}t\\ 1\end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix}\dot{c}_x\\ \dot{c}_y\end{bmatrix}=e^{-tB}\begin{bmatrix}t\\ 1\end{bmatrix}=e^{-2t}\begin{bmatrix}-t+1 & t\\ -t & t+1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}t\\ 1\end{bmatrix}=e^{-2t}\begin{bmatrix}-t^2+2t\\ -t^2+t+1\end{bmatrix}$$

$$\dot{c}_x=e^{-2t}(-t^2+2t) \longrightarrow c_x(t)=e^{-2t}\left(\frac{1}{2}t^2-\frac{1}{2}t-\frac{1}{4}\right)$$

$$\dot{c}_y=e^{-2t}(-t^2+t+1) \longrightarrow c_y(t)=e^{-2t}\left(\frac{1}{2}t^2-\frac{1}{2}\right)$$

RSRN:

$$\begin{bmatrix}x(t)\\ y(t)\end{bmatrix}=e^{2t}\begin{bmatrix}t+1 & -t\\ t & -t+1\end{bmatrix}e^{-2t}\frac{1}{2}\begin{bmatrix}t^2-t-\frac{1}{2}\\ t^2-1\end{bmatrix}=\dots=\frac{1}{4}\begin{bmatrix}-t-1\\ t-2\end{bmatrix}$$

RORN:

$$\begin{bmatrix}x(t)\\ y(t)\end{bmatrix}=e^{2t}\begin{bmatrix}t+1 & -t\\ t & -t+1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}c_x\\ c_y\end{bmatrix}+\frac{1}{4}\begin{bmatrix}-t+1\\ t-2\end{bmatrix}$$

$\square$

ogólnie rzecz biorąc metoda uzmienniania stałych przebiega następująco:

RORJ: $x_J(t)=R(t,t_0)x_0$

PRZEWIDYWANIE $\quad x_N(t)=R(t,t_0)x_0(t)$

$$\dot{x}_N=\underbrace{\frac{d}{dt}\left(R(t,t_0)\right)}x_0+R(t,t_0)\dot{x}_0(t)=\underbrace{A(t)R(t,t_0)}x_0(t)+b(t)$$

$$R(t,t_0)\dot{x}_0(t)=b(t)$$

$$\dot{x}_0(t)=R(t_0,t)b(t)$$

równanie o rozdzielonych zmiennych które umiemy całkować.

Załóżmy teraz, że $\dim X = n < \infty$

Załóżmy także, że znaleźliśmy bazę przestrzeni rozwiązań. Baza ta nazywa się fundamentalny układ rozwiązań. Oznaczmy te rozwiązania $x_1(\cdot), \dots, x_n(\cdot)$. Wybierając dodatkowo bazę $e = (e_1, \dots, e_n)$ w X możemy rozwiązania zapisać we współrzędnych

$$x_i(t) = x_i^1(t)e_1 + \dots + x_i^n(t)e_n \qquad [x_i(t)]^e = \begin{bmatrix} x_i^1(t) \\ \vdots \\ x_i^n(t) \end{bmatrix}$$

Wyznacznik $W(t) = \det \begin{bmatrix} x_1^1(t) & \cdots & x_n^1(t) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1^n(t) & \cdots & x_n^n(t) \end{bmatrix}$ nazywa się Wrońskianem fundamentalnego układu rozwiązań.

1776 - 1853

Józef Maria

Hoene Wroński

Wronskian przydaje się najbardziej w układach liniowych pochodzących od równań liniowych wyższych rzędów. Tutaj wypiszemy jedynie pewne wzory, które przydadzą się później.

$$x_i(t) = R(t,t_0)\,x_i(t_0) \quad \text{w bazie} \quad [x_i(t)]^e = [R(t,t_0)]^e_e\,[x_i(t_0)]^e$$

zatem

$$\begin{bmatrix} x^1_1(t) & \cdots & x^1_n(t) \\ \vdots & & \vdots \\ x^n_1(t) & & x^n_n(t) \end{bmatrix} = [R(t,t_0)]^e_e \begin{bmatrix} x^1_1(t_0) & \cdots & x^1_n(t_0) \\ \vdots & & \vdots \\ x^n_1(t_0) & \cdots & x^n_n(t_0) \end{bmatrix}$$

$$\boxed{\det R(t,t_0) = W(t)\,W(t_0)^{-1}}$$

?

Wyrazy macierzowe macierzy $[R(t,t_0)]^e_e$ oznaczmy $\varrho^i{}_j(t)$. Wiadomo, że $R(t,t_0)$ spełnia równanie

$$\frac{d}{dt}R(t,t_0) = A(t)\,R(t,t_0) \quad \text{macierzowo} \quad \frac{d}{dt}\underbrace{[\varrho^i{}_j]}_{\varrho} = [a^i{}_j][\varrho^i{}_j]$$

$$\frac{d}{dt}\varrho^i{}_j = \sum_k a^i{}_k\,\varrho^k{}_j$$

Policzmy

$$\frac{d}{dt}\det\varrho = \sum_{ij} B^j{}_i \frac{d}{dt}\varrho^i{}_j = \sum_{ij} B^j{}_i\,\dot\varrho^i{}_j$$

element $*^i{}_j$ macierzy dopełnień algebraicznych B macierzy $[\varrho^i{}_j]$

$$\frac{d}{dt}\det\varrho = \sum_{ij} B^j{}_i\,\dot\varrho^i{}_j = \sum_{i} B^j{}_i \sum_k a^i{}_k\,\varrho^k{}_j = \sum_{ijk} B^j{}_i\,a^i{}_k\,\varrho^k{}_j =$$

$$= \sum_{ik} \underbrace{\Big(\sum_j B^j{}_i\,\varrho^k{}_j\Big)}_{\det\varrho\,\delta^k{}_i} a^i{}_k = \det\varrho \sum_{ik} \delta^k{}_i\,a^i{}_k = \det\varrho \sum_k a^k{}_k = \det\varrho \;\operatorname{tr}(A)$$

$$\frac{d}{dt}\det R(t,t_0) = \operatorname{tr} A(t)\,\det R(t,t_0)$$

Równanie, które otrzymaliśmy na $\det R(t,t_0)$ jest równaniem liniowym w jednym wymiarze:

106

$$\dot{f}(t) = q(t)f(t) \quad \frac{d}{dt}f = q(t)dt \quad \frac{df}{f} = q(t)dt \quad \log|f| = Q(t) + C$$

$$|f(t)| = \exp(C)\exp(Q(t)) \quad f(t) = D\exp(Q(t))$$

Q jest funkcją pierwotną do q, D wyznaczamy z war. początkowego. Weźmy

W naszym przypadku $f(t) = \det R(t,t_0)$ $q(t) = \operatorname{tr} A(t)$ $f(t_0) = 1$

$$\det R(t,t_0) = D\exp\left(\int_{t_0}^{t} \operatorname{tr} A(s)ds\right) \quad D = 1$$

$$\det R(t,t_0) = \exp\int_{t_0}^{t} \operatorname{tr} A(s)ds$$ Wzór Liouville'a