WYKŁAD 2

ODWZOROWANIA LINIOWE W PRZESTRZENIACH Z NORMĄ, POCHODNA.

1.03.2016.

ODWZOROWANIA LINIOWE NA PRZESTRZENI UNORMOWANEJ

TWIERDZENIE: $(X, \|\cdot\|_X)$, $(Y, \|\cdot\|_Y)$ są przestrzeniami unormowanymi. $T \in \mathcal{L}(X,Y)$. Rownowazne są warunki:

(1) T jest ciągłe, (2) T jest ciągłe w $\bar{0}$, (2) $\sup\limits_{\|x\|_X \leq 1} \|Tx\|_Y < \infty$

DOWÓD: (1) => (2) oczywiste (2) => (3) a.a załózmy, ze $\sup\limits_{\|x\|_X \leq 1} \|Tx\|_Y =$ $+\infty$. Oznacza to, ze istnieje ciąg elementów $x_k \in X$

taki, że $\|x_k\|_X \le 1$ oraz $\|Tx_k\|_Y \ge k$. Weźmy teraz $\xi_k = \frac{1}{k} x_k$

Mamy $\|\xi_k\| = \frac{1}{k}\|x_k\| \xrightarrow{k\to\infty} 0$ zatem $\xi_k \longrightarrow 0$ ale $\|T\xi_k\| =$

$\|T\frac{1}{k}x_k\| = \frac{1}{k}\|Tx_k\| \ge 1$ zatem T nie jest ciągłe w 0 → sprzeczność

(3)⟹(1) Weźmy $x_k \longrightarrow x$ oznacza to $\|x_k - x\| \xrightarrow{k\to\infty} 0$. Oszacujmy

$$\|Tx_k - Tx\| = \|T(x_k - x)\| = \left\| T\left(\frac{\|x_k - x\|}{\|x_k - x\|}(x_k - x)\right)\right\| = \underset{\substack{\swarrow \\ 0}}{\|x_k - x\|}\,\underbrace{\left\| T\left(\frac{x_k - x}{\|x_k - x\|}\right)\right\|}_{\le M = \sup\limits_{\|x\|\le 1}\|Tx\|}$$

$\xrightarrow{k\to\infty} 0$

Otrzymaliśmy $\|Tx_k - Tx\| \xrightarrow{k\to\infty} 0$, tzn

$$Tx_k \longrightarrow Tx$$

■

DEFINICJA: Odwzorowanie liniowe spełniające warunki z poprzedniego twierdzenia nazywamy odwzorowaniem ograniczonym. Zbiór odwzorowań ograniczonych z X do Y oznaczamy $B(X,Y)$. Zbiór odwzorowań ograniczonych z X do X oznaczamy $B(X)$.

W przestrzeni $B(X,Y)$ można wprowadzić normę wzorem

$$\|T\| = \sup_{\|x\|\le 1}\|Tx\|$$

Sprawdzenie, że jest to norma jest względnie proste:

$\|T\| \ge 0$ → oczywiste $\|T\| = 0$ oznacza $\sup\limits_{\|x\|\le 1}\|Tx\| = 0$ czyli dla $x: \|x\| \le 1$ $\|Tx\| = 0$ tzn $Tx = 0$.

Weźmy teraz $\xi \in X$ $x = \frac{\xi}{\|\xi\|}$ ma normę 1 zatem $Tx = 0 = \frac{1}{\|\xi\|}T\xi$ zatem $T\xi = 0$ i $T = 0$.

$$\|T+S\| = \sup\|(T+S)x\| = \sup\|Tx+Sx\| \le \sup\|Tx\| + \sup\|Sx\| = \|T\| + \|S\|$$

Wykazaliśmy więc **FAKT**: $B(X,Y)$ z normą zdefiniowaną powyżej jest przestrzenią unormowaną. Prawdziwe jest twierdzenie:

11

TWIERDZENIE Jeśli Y jest p. Banacha to $B(X,Y)$ jest p. Banacha.

Teraz możemy wrócić do **FAKTU** (*) i wykazać (2) i (3). Rozważaliśmy $T: V \longrightarrow \mathbb{R}^n$ i wykazaliśmy, że T i T^{-1} są ciągłe. T i T^{-1} są więc ograniczone i mamy

$$\|Tx\| \leqslant \|T\|\,\|x\| \quad \text{oraz} \quad \|T^{-1}\lambda\| \leqslant \|T^{-1}\|\,\|\lambda\|$$

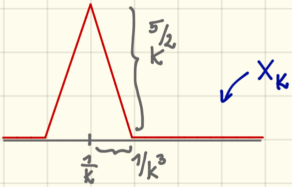
Weźmy zbiór D w V domknięty i ograniczony. Wtedy $T(D)$ jest domknięty i ograniczony w $\mathbb{R}^n$ a więc zwarty. $D = T^{-1}(T(D))$ więc jest zwarty jako ciągły obraz zbioru zwartego.

Dla dowodu (3) weźmy ciąg (x_n) Cauchy'ego w V. Ciąg Tx_n jest Cauchy'ego w $\mathbb{R}^n$. Istotnie

$$\|Tx_n - Tx_m\| = \|T(x_n - x_m)\| \leqslant \|T\|\,\|x_n - x_m\| < \|T\| \cdot \varepsilon \text{ dla dużych } n,m$$

Tx_n jest więc zbieżny do $\lambda \in \mathbb{R}^n$, x_n jest więc zbieżny do $\lambda^1 e_1 + \dots + \lambda^n e_n$.

Wróćmy do odwzorowań liniowych w przestrzeniach unormowanych. Rozważmy szczególny przypadek $\mathcal{L}(X,\mathbb{R})$ gdzie w $\mathbb{R}$ bierzemy $|\cdot|$ jako normę. $\mathcal{L}(X,\mathbb{R})$ to funkcjonały liniowe, coś w rodzaju przestrzeni dualnej. Okazuje się jednak, że nie wszystkie funkcjonały liniowe są ciągłe. Weźmy np $X = C([0,1])$, $\|x\| = \int_0^1 |x(t)|\,dt$ zdefiniujmy $\Phi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} x(\frac{1}{n})$ Pokażemy że Φ nie jest ciągły. Wystarczy znaleźć ciąg (x_k) zbieżny do 0 taki, że $\Phi(x_k)$ zbieżny nie jest



$$\|X_k\| = \frac{1}{k^3} \cdot k^{5/2} = \frac{1}{\sqrt{k}} \xrightarrow{k\to\infty} 0$$

$$x_k \xrightarrow{k\to 0} 0 \quad \text{gdyż } \forall t \in [0,1]\ \exists k_x : \forall k > k_x \ \ x_k(t) = 0$$

$$\Phi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{m^2} x(\frac{1}{m}) \qquad \Phi(x_k) = \frac{1}{k^2} \cdot k^{5/2} = \sqrt{k} \xrightarrow{k\to\infty} \infty$$

Ma więc sens wyróżnianie $B(X,\mathbb{R})$ jako nietrywialnej podprzestrzeni w $\mathcal{L}(X,\mathbb{R})$. To właśnie $B(X,\mathbb{R})$ oznaczane także X' lub X^* jest nazywana przestrzenią dualną do X. Dla przestrzeni skończenie wymiarowych obowiązuje twierdzenie

12

FAKT: Jeśli X, Y są unormowanymi przestrzeniami skończenie wymiarowymi to $B(X,Y) = L(X,Y)$

DOWÓD: Wystarczy pokazać dla $\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ z normą max.

Weźmy $(x_k) \in \mathbb{R}^n$ $\quad \|x_k\| \longrightarrow 0 \quad \|x_k\| = \max |x_k^i|$

$F \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ F jest macierzą $F = [F^i_j]$ $\quad (Fx)^i = F^i_j x^j$

$$\|Fx\| = \max_i |F^i_j x^j| = \max_i \sum_j |F^i_j||x^j| \leq \max_i \sum_j |F^i_j|(\max_l |x^l|) =$$

$$= \max_i \left(\max_l |x^l| \sum_j |F^i_j|\right) = \|x\| \underbrace{\left[\max_i \sum_j |F^i_j|\right]}_{M(F)} \qquad \|Fx\| \leq M(F)\|x\|$$

jeśli więc $x_k \longrightarrow 0$ to $Fx_k \longrightarrow 0$ więc F ciągłe.

$$\left.\begin{array}{l} \begin{bmatrix} F^1_1 & F^1_2 & \cdots & F^1_n \\ F^2_1 & F^2_2 & \cdots & F^2_m \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ F^m_1 & F^m_2 & \cdots & F^m_n \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \overset{i=1}{} \sum_j |F^1_j| \\ \overset{i=2}{} \sum_j |F^2_j| \\ \overset{i=m}{} \sum_j |F^m_j| \end{array}\right\} \longrightarrow \max_i \longrightarrow M(F)$$

■

W przestrzeniach skończenie wymiarowych przestrzeń dualna jest taka jak uczymy się na algebrze.

RÓZNICZKOWANIE W PRZESTRZENI BANACHA

13

Niech X,Y będą przestrzeniami Banacha, $\mathcal{U}\subset X$ otwarty $f:\mathcal{U}\longrightarrow Y$ odwzorowanie

$$f(x+h)=f(x)+Ah+R(x,h)$$

DEFINICJA: Mówimy, że f jest różniczkowalna w x jeśli istnieje $A\in B(X,Y)$ (tzn. odwzorowanie liniowe i ciągłe) takie, że

$$(*)\quad \lim_{h\to 0}\frac{\|R(x,h)\| \leftarrow \text{norma w } Y}{\|h\| \nwarrow \text{norma w } X}=0$$

Zanim odwzorowanie $A\in B(X,Y)$ nazwiemy pochodną f w x powinniśmy sprawdzić, czy jest dobrze określone. Weźmy więc

$A_1, A_2\in B(X,Y)$ takie, że $R_{1/2}(x,h)=f(x+h)-f(x)-A_{1/2}\cdot h$ spełnia (*)

$$\frac{1}{\|h\|}\left(R_1(x,h)-R_2(x,h)\right)=\frac{1}{\|h\|}\left(f(x+h)-f(x)-A_1h-f(x+h)+f(x)+A_2h\right)=$$

$$\frac{1}{\|h\|}\left(A_2h-A_1h\right)=(A_2-A_1)\frac{h}{\|h\|}$$

Wiadomo, że $\frac{\|R_i(x,h)\|}{\|h\|}\xrightarrow[h\to 0]{}0$ zatem także $(A_2-A_1)\frac{h}{\|h\|}\xrightarrow{h\to 0}0$

zauważmy, że $h/\|h\|$ to wektor długości 1.

Załóżmy teraz, że $A_1\neq A_2$ wtedy $A_2-A_1\neq 0$ co oznacza, że istnieje punkt $u: \|u\|=1$ taki, że $(A_2-A_1)u\neq 0$ tzn $\|(A_2-A_1)u\|\neq 0$.

Weźmy więc ciąg $h_n=\frac{1}{n}u$ wtedy $h_n\longrightarrow 0$ i zgodnie z wcześniejszą obserwacją

$$\lim_{n\to\infty}\left\|(A_2-A_1)\frac{h_n}{\|h_n\|}\right\|\longrightarrow 0 \quad \text{ale} \quad \frac{h_n}{\|h_n\|}=u \quad \text{zatem} \quad \left\|(A_2-A_1)\frac{h_n}{\|h_n\|}\right\|=\|(A_2-A_1)u\|\neq 0$$

sprzeczność

Założenie $A_2 \neq A_1$ doprowadziło do sprzeczności, zatem udowodniliśmy fakt:

FAKT: Jeśli f jest różniczkowalne w x_0, to odwzorowanie $A \in B(X,Y)$ takie, że $\|R(x,h)\|/\|h\| \xrightarrow[h \to 0]{} 0$ jest wyznaczone jednoznacznie.

Odwzorowanie to nazywać będziemy pochodną f w punkcie x i oznaczać $f'(x)$. Zauważmy, że jeżeli f jest różniczkowalne w każdym punkcie pewnego zbioru otwartego $U \subset X$ to pochodna jest odwzorowaniem

$X \supset U \xrightarrow{f'} B(X,Y)$ podczas kiedy wyjściowe odwzorowanie to

to są różne byty matematyczne. $\hookrightarrow$ $X \ni U \xrightarrow{f} Y$

Pochodną zdefiniowaną jak wyżej nazywa się także pochodną mocną, pochodną Fréche'ta.

PRZYKŁAD: $X = C([0,1])$ z normą supremum $f : X \to X$

$$f(v)(t) = \int_0^t v^2(s)\,ds$$

$$f(v+h)(t) = \int_0^t (v+h)^2(s)\,ds = \int_0^t \left(v^2(s) + 2v(s)h(s) + h^2(s) \right) ds =$$