WYKŁAD 20, 21

Całka Riemanna na $\mathbb{R}^n$

17 i 20 maja

1

CAŁKA RIEMANNA NA $\mathbb{R}^n$

Jak praktycznie liczyć całki po obszarach w $\mathbb{R}^n$ – zamiana na całkę iterowaną, zmiana kolejności całkowania

Po jakich zbiorach można całkować – zbiory miary Lebesgue'a zero, zbiory mierzalne w sensie Jordana

Całka po kostce – definicja jak na $\mathbb{R}^1$

Alternatywne definicje – podziały wypunktowane

Jakie funkcje są całkowalne?

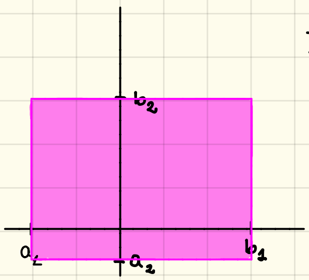
Zamiana zmiennych w całce wielokrotnej

Rozkład jedności

Kostkę n-wymiarową nazywamy podzbiór $\mathbb{R}^n$ będący iloczynem kartezjańskim odcinków:

$$K = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \cdots \times [a_n, b_n]$$

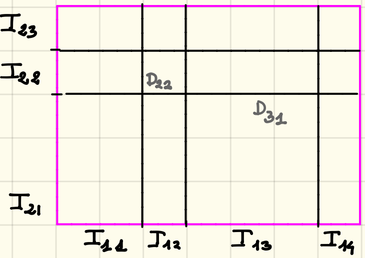
Kostka dwuwymiarowa to prostokąt, kostka trójwymiarowa to prostopadłościan. Rysunki będziemy robić w dwóch wymiarach.



Idea konstrukcji całki Riemanna wymaga, byśmy dzielili kostkę na mniejsze „podkostki" przybliżali wartość całki sumując objętości „prostopadłościanów", których podstawami są podkostki. Można to robić na kilka równoważnych sposobów. Zaczniemy od definicji identycznej z tą w jednym wymiarze.

Podział kostki uzyskujemy dzieląc każdy z odcinków. Dokładniej podziałem D nazywamy układ $\pi_1, \dots, \pi_n$ podziałów odcinków $[a_1,b_1], \dots, [a_n,b_n]$

2



Każdy odcinek $[a_i,b_i]$ dzieli się na p_i części
Kostka dzieli się na $p_1 \cdots p_n$ części postaci

$$D_{j_1 \dots j_n} = I_{1 j_1} \times I_{2 j_2} \times \dots \times I_{n j_n}$$

Potrzebne nam jest też objętość (powierzchnia, miara...)

$$m(D_{j_1 \dots j_n}) = |I_{1 j_1}| \cdot |I_{2 j_2}| \cdot \dots \cdot |I_{n j_n}|$$

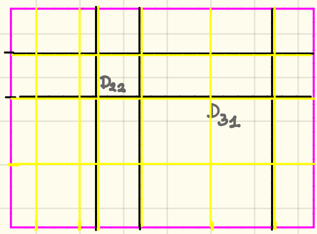
Czasem kostki D... wygodniej jest numerować „po kolei": D_k, $k = 1 \dots (p_1 \cdots p_n)$. Podobnie jak w jednym wymiarze definiujemy

$$\overline{S}(\pi, f) = \sum_k \sup_{x \in D_k} f(x)\, m(D_k) \qquad \underline{S}(\pi, f) = \sum_k \inf_{x \in D_k} f(x)\, m(D_k)$$

$\pi = (\pi_1, \dots, \pi_n)$

W zbiorze podziałów kostki wprowadzamy relację skierowania: podział π jest późniejszy niż ρ jeśli $\forall i \in 1 \dots n$ π_i jest późniejszy niż ρ_i

$\pi > \rho$ → podział na żółto jest późniejszy niż podział na czarno.

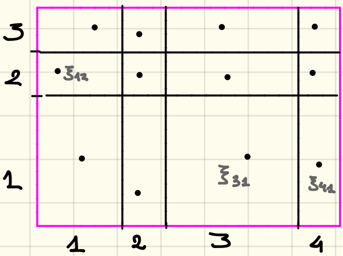


ograniczone

Mówimy, że f jest całkowalna na D jeśli istnieją i są równe granice uogólnione $\lim \overline{S}(\pi, f)$, $\lim \underline{S}(\pi, f)$. Ich wspólną wartość nazywamy całką Riemanna z f po D i oznaczamy $\int_D f$

Tak zdefiniowana całka ma wszelkie potrzebne własności: funkcja stała jest całkowalna, całka jest liniowa ze względu na strukturę wektorową w zbiorze funkcji całkowalnych, całka jest monotoniczna, tzn $f \leq g \Rightarrow \int_D f \leq \int_D g$.

Ta definicja całki wymaga aby istniały pojęcia sup i inf w zbiorze wartości, w szczególności nie nadaje się do całkowania funkcji o wartościach wektorowych. Można temu zaradzić modyfikując nieco definicję i używając sumy wypunktowanej zamiast sumy dolnej i górnej.



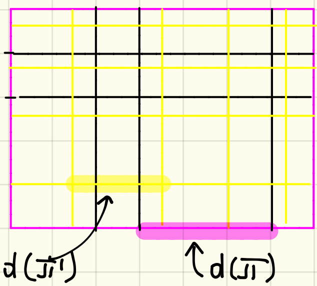
Wypunktowanie podziału $\pi = (\pi_1 \dots \pi_n)$ to zbiór punktów $\xi_{j_1 \dots j_n}$ $j_i \in 1 \dots p_i$. Czasem wygodniej numerować kolejnymi liczbami naturalnymi ξ_k $k = 1 \dots (p_1 p_2 \cdots p_n)$

Suma wypunktowana

$$S(\pi, f, \xi) = \sum_k f(\xi_k)\, m(D_k)$$

W tym kontekście używa się innej relacji skierowania. Niech $d(\pi)$ oznacza najdłuższą krawędź kostek podziału π i.e. $d(\pi) = \max\{ |I_{i j_i}| : i = 1 \dots n, j_i = 1 \dots p_i \}$ Mówimy że π' jest późniejszy niż π jeśli $d(\pi') \leq d(\pi)$

$\pi \gg \rho$



Pora porównać

$$\lim_{\gg} S(\pi, f, \xi) \quad z \quad \lim_{\succ} \overline{S}(\pi, f),$$
$$\lim_{\succ} \underline{S}(\pi, f).$$

Prawdziwy jest fakt

FAKT: Jeśli ciąg uogólniony sum wypunktowanych jest zbieżny, to funkcja f jest całkowalna w sensie Riemanna i całka jest równa granicy ciągu sum wypunktowanych.

DOWÓD: $g = \lim\limits_{\gg} S(\pi, f, \xi)$. Oznacza to że $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \pi : \forall \pi' \gg \pi$ $|S(\pi, f, \xi) - g| < \varepsilon$. Zauważmy także, że jeśli $\pi' \succ \pi$ to także $\pi' \gg \pi$.
Ponadto punkty w których f przyjmuje min lub max na kostce podziału to jest rodzaj wypunktowanie, zatem prawdą jest, że

$$\forall \pi' \succ \pi \quad |\overline{S}(\pi, f) - g| < \varepsilon \quad i \quad |\underline{S}(\pi, f) - g| < \varepsilon$$

To pokazuje, że $\overline{S}(\pi, f) - \underline{S}(\pi, f) < 2\varepsilon$, zatem funkcja f jest całkowalna. Równość całki i granicy g jest już oczywista. Można więc napisać

$$\lim_{\gg} S(\pi, f, \xi) = \int_D f \quad \blacksquare$$

Okazuje się, że zachodzi też twierdzenie w drugą stronę:

FAKT: Jeśli f całkowalna na D to istnieje $\lim\limits_{\gg} S(f, \pi, \xi)$ i jest równa $\int_D f$.

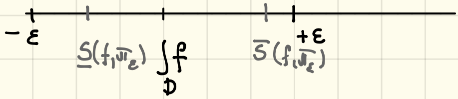
DOWÓD:

Zauważmy że dla dowolnego wypunktowanie podziału π zachodzi nierówność $\underline{S}(f, \pi) \leq S(\pi, f, \xi) \leq \overline{S}(f, \pi)$
Zbadajmy $\lim\limits_{\gg} \underline{S}(f, \pi)$ i $\lim\limits_{\gg} \overline{S}(f, \pi)$ czyli bierzemy sumy górną i dolną oraz skierowanie, które normalnie odnosiło się do sumy wypunktowanej.

Wiadomo, że dla $\varepsilon > 0$ znaleźć można π_ε takie, że dla π_ε i każdego późniejszego względem $\succ$

$$\overline{S}(f, \pi) - \int_D f < \varepsilon \quad i \quad \int_D f - \underline{S}(f, \pi) < \varepsilon$$

Chcemy pokazać że $\underline{S}$ i $\overline{S}$ są zbieżne do tej samej granicy względem $\gg$.



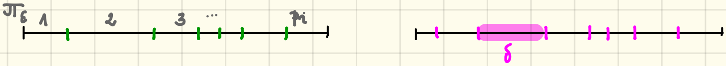
Weźmiemy teraz podział ρ taki, że $d(\rho) < \delta$ dla pewnej nieznanej jeszcze δ (ustalimy ją później). Będziemy chcieli, żeby $\underline{S}(f,\rho)$ też była gdzieś w pobliżu $\int_D f$. Nie bardzo potrafimy porównać $\underline{S}(f,\pi_\varepsilon)$ z $\underline{S}(f,\rho)$. Zrobimy to na raty: Pokażemy, że

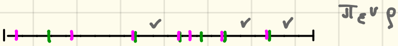
→ $S(f,\pi_\varepsilon \cup \rho)$ jest w pobliżu $\int_D f$ ← to jest łatwe: $\pi_\varepsilon \cup \rho > \pi_\varepsilon$ zatem $\underline{S}(f,\pi_\varepsilon\cup\rho)$ i $\overline{S}(f,\pi_\varepsilon\cup\rho)$ spełniają te same nierówności co $\underline{S}(f,\pi)$ i $\overline{S}(f,\pi)$

→ $S(f,\rho)$ jest w pobliżu $S(f,\pi_\varepsilon\cup\rho)$

trudniejsze – trzeba wybrać odpowiednią δ

Weźmy przykładowy odcinek $[a_i, b_i]$





Liczba odcinków podziału $\pi_\varepsilon\cup\rho$, które nie są odcinkami podziału ρ (czyli mają przynajmniej jeden koniec z podziału π_ε) jest $\leq 2p_i$. Łączna ich długość $\leq 2p_i\delta$. Łączna objętość kostek z $\pi_\varepsilon\cup\rho$, które nie pokrywają się z ρ to liczba $\leq 2(p_1+p_2+\dots+p_i)\delta\cdot d(D)^{m-1}$. Jeśli $\Delta = \sup_D f - \inf_D f$ to

$$\underline{S}(\rho,f) - \underline{S}(\rho\cup\pi_\varepsilon,f) < \underbrace{2(p_1+\dots+p_i)\delta\, d(D)^{m-1}\Delta}_{\text{trzeba wybrać } \delta \text{ taką, żeby ta różnica była mała,}} < \varepsilon$$

$\delta < \varepsilon / 2(p_1+\dots+p_i)d(D)^{m-1}\Delta$

Skoro $\underline{S}(f,\rho\cup\pi_\varepsilon)$ znajduje się nie dalej niż ε od $\int_D f$ oraz $\underline{S}(\rho,f)$ znajduje się nie dalej niż ε od $\underline{S}(f,\rho\cup\pi_\varepsilon)$ to ostatecznie $\underline{S}(\rho,f)$ jest

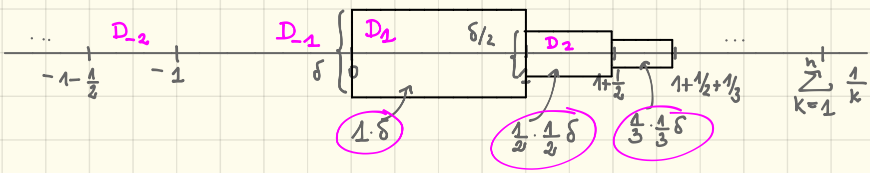
Nie dalej niż 2ε od $\int_D f$. δ wyznaczone zostało przez ε i π_ε zatem ostatecznie zależy jedynie od ε. Jedynym warunkiem na ρ było $d(\rho) < \delta$. Każde $\rho' \gg \rho$ spełnia ten warunek zatem $\underline{S}(f, \pi)$ jest zbieżne także względem $\gg$ i do tej samej granicy. ■ **6**

Pora się teraz zastanowić jakie funkcje są całkowalne. To łączy się głęboko z pytaniem po jakich zbiorach, poza kostkami można całkować. Zastanówmy się najpierw nad tymi zbiorami. W całce Riemanna na $\mathbb{R}^1$ dyskutowaliśmy klasę funkcji całkowalnych. Stwierdziliśmy, że jeśli f jest ograniczona i ma conajwyżej przeliczalnie wiele punktów nieciągłości to jest całkowalna. Można też powiedzieć że wartości funkcji na przeliczalnym podzbiorze odcinka nie mają znaczenia dla wartości całki. Pytanie czy przeliczalne zbiory to są największe zbiory mające taką własność?

DEFINICJA: Mówimy, że zbiór $X \subset \mathbb{R}^n$ ma **miarę Lesbeque'a 0** jeśli $\forall \varepsilon > 0$
$\exists (D_i)_{i \in \mathbb{N}}$ $\quad X \subset \bigcup_{\mathbb{N}} D_i \quad \sum_i m(D_i) < \varepsilon$

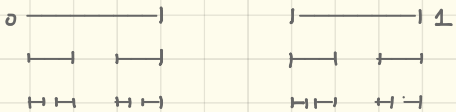
ciąg kostek

PRZYKŁAD: (1) Skończony podzbiór $\mathbb{R}^n$ jest miary Lesbeque'a 0, (2) Przeliczalny podzbiór w $\mathbb{R}^n$ jest miary Lesbeque'a 0 (3) „chudy" zbiór w $\mathbb{R}^n$ jest miary 0 np $X = \{(x,0) : x \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^2$ jest miary 0 – istotnie



Ciąg kostek $D_{\pm n}$ pokrywa X, ponadto $m(D_{\pm n}) = \frac{1}{n^2}\delta$ zatem $\sum_{-\infty}^{\infty} m(D_n) = \delta \cdot \frac{\pi^2}{6}$. Dla ustalonego ε wystarczy więc $\delta < \varepsilon \cdot \frac{6}{\pi^2}$

(4) Zbiór Cantora w $\mathbb{R}^1$ jest miary Lesbegue'a 0 ale jest nieprzeliczalny:



$2/3$
$4/9$
$8/27$
$\vdots$
$$2^n/3^n = \left(2/3\right)^n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

Zbiory miary zero mają następujące pożyteczne (i oczywiste) własności:

FAKT

(1) Jeśli X jest miary zero i $Y \subset X$ to Y jest miary zero
(2) Przeliczalna suma zbiorów miary zero jest miary zero

Niech X_i będzie miary zero. Dla $\varepsilon > 0$ $\exists$ ciąg D_{ij} taki że $\sum_j m(D_{ij}) < \frac{\varepsilon}{2^i}$ $X_i \subset \bigcup_j D_{ij}$
wtedy $\sum_{ij} m(D_{ij}) < \varepsilon$ i $\bigcup_i X_i \subset \bigcup_{ij} D_{ij}$

TWIERDZENIE Lesbegue'a o całkowalności w sensie Riemanna

Funkcja ograniczona na kostce domkniętej D jest całkowalna wtedy i tylko wtedy gdy zbiór punktów nieciągłości tej funkcji jest miary Lesbegue'a 0.

Dla dowodu tego twierdzenia potrzebujemy nowego pojęcia.

DEFINICJA: Niech $f: D \to \mathbb{R}$ będzie ograniczona. **Wahaniem** funkcji f w punkcie $x_0 \in D$ nazywamy

$$\omega(f, x_0) = \lim_{r\to 0} \Big(\sup_{D\cap K(x_0,r)} f(x) - \inf_{D\cap K(x_0,r)} f(x)$$

Oczywiście jeśli f jest ciągła w x_0 to $\omega(f, x_0) = 0$ i odwrotnie – zniknanie wahania oznacza ciągłość funkcji

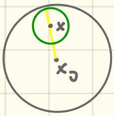
W trakcie dowodu tw. Lesbegue'a potrzebne będą dwa fakty dotyczące wahania funkcji w punkcie

FAKT: Jeśli $f: D \to \mathbb{R}$ jest ograniczona a D jest kostką domkniętą to zbiór $D_\varepsilon = \{x \in D : \omega(f, x) \geq \varepsilon\}$ jest domknięty w $\mathbb{R}^n$ dla dowolnego $\varepsilon > 0$.

DOWÓD: D_ε ma być domknięty, zatem $\mathbb{R}^n \setminus D_\varepsilon$ ma być otwarty. $\mathbb{R}^n \setminus D_\varepsilon =$
$(\mathbb{R}^n \setminus D) \cup (D \setminus D_\varepsilon)$ zbiór $\mathbb{R}^n \setminus D$ jest otwarty. Trzeba więc pokazać, że $D \setminus D_\varepsilon$ zawiera jedynie punkty wewnętrzne $\mathbb{R}^n \setminus D_\varepsilon$, czyli 8

jeśli $x_0 : \omega(f, x_0) < \varepsilon$ to istnieje $r : \forall x \in K(x_0, r) \cap D \quad \omega(f, x) < \varepsilon$

Ustalmy więc $\varepsilon > 0$ i weźmy $x_0 \in D : \omega(f, x_0) = \omega_0 < \varepsilon$. Z definicji wahania wynika, że $\exists\, r > 0 : \omega_0 \leq \sup_{x \in D \cap K(x_0, r)} f(x) - \inf_{x \in D \cap K(x_0, r)} f(x) < \varepsilon$



zatem dla jeśli $r_x = r - \|x - x_0\|$ to

$$\sup_{y \in D \cap K(x, r_x)} f(y) - \inf_{y \in D \cap K(x, r_x)} f(y) < \varepsilon \quad \text{tzn } \omega(f, x) < \varepsilon$$

∎

FAKT: $f : D \to \mathbb{R}$ ograniczona, D kostka domknięta, $\forall x \in D \quad \omega(f, x) < \varepsilon$
Istnieje podział π kostki D takie, że $\overline{S}(\pi, f) - \underline{S}(\pi, f) < \varepsilon\, m(D)$

DOWÓD:
Dla każdego $x \in D$ istnieje promień r_x taki, że $\sup_{D \cap K(x, r_x)} f(x) - \inf_{D \cap K(x, r_x)} f(x) < \varepsilon$

Kule $K(x, r_x)$ tworzą pokrycie otwarte zbioru D. D jest zwarty, zatem można wybrać podpokrycie skończone. Ponieważ D jest kostką, kule można zastąpić kostkami, a następnie znaleźć taki podział, że każda kostka podziału zawiera się w jakiejś kostce pokrycia. Podział ten spełnia żądany warunek.

∎

Jesteśmy gotowi do udowodnienia tw. Lesbegue'a:

DOWÓD: (1) Jeśli f całkowalna to zbiór punktów nieciągłości jest miary zero: Punkty nieciągłości to punkty o dodatnim wahaniu. Oznaczamy $A_m = \{x \in D : \omega(f, x) \geq \frac{1}{m}\}$ zbiór punktów nieciągłości to $A = \bigcup_m A_n$.
Pokażemy, że zbiór A_n jest miary Lesbegue'a 0. Ustalmy $\varepsilon > 0$. Z całkowalności f wynika istnienie podziału π_m takiego, że

$$\overline{S}(f, \pi_n) - \underline{S}(f, \pi_n) < \varepsilon / m$$

Ponumerujmy kostki podziału π_ε kolejnymi liczbami naturalnymi $1, \dots, p$. Niech P_0 oznacza podzbiór $\{1, \dots, p\}$ dany warunkiem $i \in P_0 \Leftrightarrow \operatorname{int} D_i \cap A_n \neq \emptyset$

9

$$\frac{1}{n} \sum_{i \in P_0} m(D_i) \leqslant \sum_{i \in P_0} \left[\sup_{D_i} f(x) - \inf_{D_i} f(x)\right] m(D_i) < \overline{S}(f, \pi_\varepsilon) - \underline{S}(f, \pi_\varepsilon) < \varepsilon/2n$$

$$\Downarrow$$

$$\sum_{i \in P_0} m(D_i) < \varepsilon/2$$

Te punkty z A_n, które nie należą do wnętrza żadnej kostki z podziału π_ε leżą na brzegach kostek zatem tworzą zbiór miary zero. Możemy więc znaleźć ciąg kostek $(E_\ell)_{\ell \in \mathbb{N}}$ taki że punkty te zawarte są w $\bigcup_{\ell \in \mathbb{N}} E_\ell$ i $\sum_\ell m(E_\ell) < \varepsilon/2$ wtedy

$$A_n \subset \bigcup_{i \in P_0} D_i \cup \bigcup_\ell E_\ell \quad \text{oraz} \quad \sum_{i \in P_0} m(D_i) + \sum_\ell m(E_\ell) < \varepsilon.$$

Liczba ε jest dowolna więc A_n jest miary 0. Przeliczalna suma zbiorów miary zero jest miary zero.

(2) Jeśli zbiór punktów nieciągłości $f: D \to \mathbb{R}$ jest miary zero to f całkowalna.

A_n i A oznaczają to co poprzednio, tzn A miary zero i A_n też miary zero. A_n jest domknięty (wcześniejszy fakt) i ograniczony ($A_n \subset D$) zatem A_n jest zwarty. Weźmy teraz ciąg kostek $(E_\ell)_{\ell \in \mathbb{N}}$ taki, że $\sum_\ell m(E_\ell) < \frac{1}{n}$. Ze zwartości A_n wynika, że z ciągu (E_ℓ) można wybrać skończoną liczbę elementów zawierających w sumie A_n. Załóżmy, że numeracja jest taka, że

$$A_n \subset \bigcup_{\ell=1}^{L} E_\ell \quad \sum_{1}^{L} m(E_\ell) < \frac{1}{n}$$

Bez straty ogólności można przyjąć że E_ℓ, $\ell = 1 \dots L$ stanowią elementy pewnego podziału π zbioru D. Pozostałe (oprócz E_ℓ) kostki podziału oznaczmy $F_1 \dots F_P$ dla $i \in 1 \dots P$ $F_i \cap A_n = \emptyset$ tzn $\forall x \in \bigcup_{i \in 1 \dots P} F_i$ $\omega(f, x) < \frac{1}{n}$

Z drugiego faktu dotyczącego wahania wynika że istnieje podział ρ_i zbioru F_i taki że różnica sumy górnej i dolnej nie przekracza $\frac{1}{n} m(F_i)$

Weźmy teraz podział σ drobniejszy od π na części E i drobniejszy od ρ_K na każdym F_K

$$\overline{S}(f, \sigma) - \underline{S}(f, \sigma) = \sum_{\ell=1}^{L} \sum_{B \subset E_\ell} \left[\sup_P f(x) - \inf_P f(x)\right] m(P) + \sum_{i=1}^{P} \sum_{B \subset F_i} \left[\sup_P f(x) - \inf_P f(x)\right] m(P)$$

$$\overline{S}(f,\sigma)-\underline{S}(f,\sigma)=\sum_{l=1}^{L}\sum_{B\subset E_l}\underbrace{\left[\sup_P f(x)-\inf_P f(x)\right]}_{\substack{<2M \\ \uparrow\ \sup_D |f|}} m(P)+\sum_{i=1}^{p}\underbrace{\sum_{B\subset F_i}\left[\sup_P f(x)-\inf_P f(x)\right]m(P)}_{1/n\ m(F_i)}$$

objętość części E

$$\leq 2M\cdot\frac{1}{n}+\sum_{i=1}^{p}\frac{1}{n}m(F_i)\leq\underbrace{\frac{1}{n}\left(2M+m(D)\right)}_{\text{Dowolnie małe}}$$

Funkcja f jest więc całkowalna. ■

10