

WYKŁAD 25

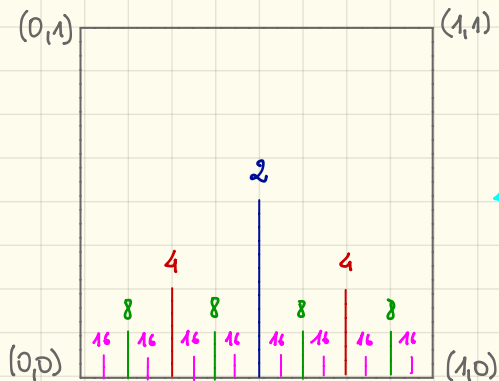
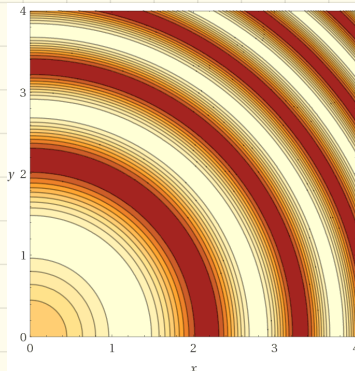
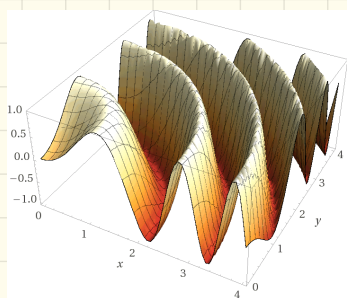
NIEWŁĄŚCIWA CAŁKA RIEMANNA

NIEWŁAŚCIWA CAŁKA RIEMANNA

Pojęcie **niewłaściwa całka Riemanna** dotyczy sytuacji kiedy obszar całkowania jest nieograniczony lub kiedy obszar całkowania jest ograniczony ale funkcja jest nieograniczona. Nadal jednak mówimy o obszarach których brzeg jest zbiorem miary zero. W zastosowaniach brzeg jest zazwyczaj lokalnie wykresem odkształcenia ciągłego. Rozważmy dla przykładu:

$$A = [0, \infty[\times [0, \infty[\subset \mathbb{R}^2 \quad f: A \rightarrow \mathbb{R} \quad f(x, y) = \sin(x^2 + y^2)$$

$$B =]0, 1[\times]0, 1[\quad g: B \rightarrow \mathbb{R} \quad g\left(\frac{2l+1}{2^n}, y\right) = 2^n \text{ w pozostałych przy } f(x, y) = 0$$



Całkę niewłaściwą po A definiujemy podobnie do przypadku jednowymiarowego z jedną istotną różnicą:

Niech K będzie zbiorem mierzalnym, zwartym, zawartym w A . Mówimy, że f jest **lokalnie całkowalna na A** jeśli jest całkowalna (w szczególności ograniczona na każdym takim $K \subset A$).

Rodzina wszystkich J -mierzalnych, zwartych podzbiorów A jest wyposażona w relację skierowanie, tzn. K_2 jest późniejszy niż K_1 jeśli $K_1 \subset K_2$.

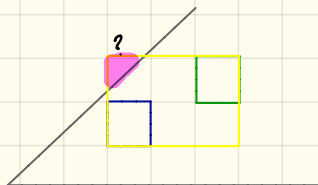
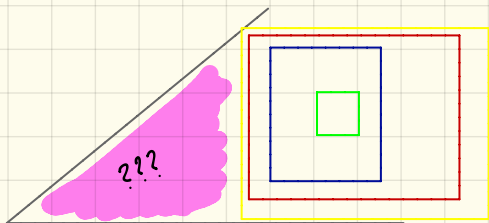
Dla lokalnie całkowalnej funkcji f definiujemy ciąg uogólniony

$$K \mapsto \int_K f$$

Jeśli granice powyższego ciągu istnieje to jej wartość nazywamy **całką z f po zbiorze A** i oznaczamy $\int_A f$

I gdzie tu ta różnica w definicji w stosunku do $\mathbb{R}^1$? W tym, że na $\mathbb{R}^1$ definiowaliśmy całkę po odcinku niezwartym I a jako zbiory K numerujące ciąg uogólniony rozważaliśmy **jedynie odcinki zwarte** a nie np. skończone sumy odcinków zwartych.

Odpowiednikami odcinków w $\mathbb{R}^n$ są kostki. Problem w tym, że wielu mierzalnych zbiorów po których chcielibyśmy całkować nie da się „wypełnić” powiększającymi się kostkami. Nie jest też prawdziwe, że dla każdego dwóch kostek D_1, D_2 istnieje kostka $D_3 \subset A$ taka że $D_1 \subset D_3$ i $D_2 \subset D_3$.



Co się da dla odanków nie da się dla katek spód różnica. Podstawowy konsekwencję tej różnicy jest nieistnienie pojęcia zbieżności warunkowej dla całek po obszarach w $\mathbb{R}^n$. $n > 1$. Dokładniej:

(1) Jeśli f jest funkcją nieujemną wystarczy wybrać dowolny zwykły ciąg zbiorów $K_n \subset A$ takich, że $K_i \subset K_{i+1}$ oraz $\bigcup_{i \in \mathbb{N}} K_i = A$. Wtedy $\int_A f$ istnieje wtedy i tylko wtedy gdy istnieje

$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{K_n} f$. Istotnie: dla nieujemnej funkcji ciąg $K \mapsto \int_K f$ jest niemalejący. Do zbieżności wystarczy K

Więc pokazać że jest ograniczony. Istnienie granicy $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{K_n} f$ oznacza, że ograniczony jest podciąg numerowany przez K_n .

Ograniczeniem jest oczywiście granica tego podciągu. Weźmy teraz dowolny zbiór $K \subset A$, zwarty, J -mierzalny. Istnieje $m \in \mathbb{N}$ takie że K_m jest późniejszy niż K . Kluczem jest zwartość K . Wobec tego

$$\int_K f \leq \int_{K_m} f \leq \int_A f.$$

(3) Dwa przykłady problemów z tw. Fubini'ego

Czy istnieje $\int_A f$? $K_R = \{(x,y) : x \geq 0, y \geq 0, x^2 + y^2 \leq R^2\}$

$$\int_{K_R} f = \int_{K_R} \sin^2(x^2+y^2) dx dy = \int_{[0, \frac{R}{\sqrt{2}}] \times [0, R]} \sin^2 r^2 r dr d\varphi = \frac{\pi}{2} \int_0^R \sin^2 r^2 r dr = \frac{\pi}{2} \left(-\frac{1}{3} \cos r^2 \right) \Big|_0^R =$$

$$= \frac{\pi}{2} \left(-\frac{1}{3} \cos R^2 + \frac{1}{3} \right) = \frac{\pi}{4} (1 - \cos R^2) \text{ nie ma granicy dla } R \rightarrow \infty. \text{ Znaleźliśmy}$$

podciąg ciągów $K \rightarrow \int_K f$ ($K_R \rightarrow \int_{K_R} f$) niezbieżny zatem całka $\int_A f$ nie istnieje

Istnieje za to całki iterowane:

$$\int_0^\infty dx \int_0^\infty dy \sin(x^2+y^2) = \int_0^\infty dx \int_0^\infty dy (\sin x^2 \cos y^2 + \cos x^2 \sin y^2) = 2 \int_0^\infty \cos x^2 dx \int_0^\infty \sin x^2 dx$$

całki Fresnela, obie istnieją

$$\int_0^\infty \sin x^2 dx = \int_0^\infty \frac{\sin t}{\sqrt{t}} dt \quad \text{--- } e^{-kt} \quad F(k) = \int_0^\infty \frac{\sin t}{\sqrt{t}} e^{-kt} dt$$

$$\frac{1}{\sqrt{t}} = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty e^{-ty^2} dy \quad \int_0^\infty \left(\sin t e^{-kt} \int_0^\infty \frac{2}{\pi} e^{-ty^2} dy \right) dx = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \sin t e^{-kt - y^2 t} dy dt =$$

można bo istnieje całka z modułem

$$= \frac{2}{\pi} \int_0^\infty dy \int_0^\infty dt \sin t e^{-t(k+y^2)} = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty dy \frac{1}{1+(k+y^2)^2} = \frac{2}{\pi} \frac{\pi}{2\sqrt{2}} = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

lim $k \rightarrow 0$

można przejść do granicy pod znakiem całki bo dla $k \in [0,1]$

$$f(k,y) \leq \frac{1}{1+y^2} \text{ całkowalne.}$$

Obie iterowane istnieją ale nie istnieje całka po A.

$\int_B g$ istnieje: g dodatnia, $B_\varepsilon = [\varepsilon, 1-\varepsilon] \times [\varepsilon, 1-\varepsilon]$ $\int_{B_\varepsilon} g = 0$ bo g jest 0 poza zbiorem

miary zero. Zatem $\int_B g = 0$. Inaczej dla całek iterowanych:

$$\int_0^1 dy \int_0^1 dx f(x, y) = \int_0^1 0 dy = 0$$

↑ dla ustalonego $y > 0$ $f \neq 0$ jedynie w skończonej liczbie punktów

$$\int_0^1 dx \int_0^1 dy f(x, y) = ? \quad \int_0^1 f\left(\frac{2^{l+1}}{2^n}, y\right) dy = \int_0^{1/2^n} 2^n dy = 1 \quad \text{dla pozostałych } x = 0.$$

$x \mapsto \int_0^1 dy f(x, y)$ nie jest całkowalna w sensie Riemanna.

ELEMENTY TEORII LEBESGUE'A

(H. RUDIN, PODSTAWY ANALIZY MATEMATYCZNEJ)

SŁOWNIK:

Algebra zbiorów - Zbiór $\mathcal{R}$ składający się z podzbiorów ustalonego zbioru $(u \text{ nos } \mathbb{R}^n)$ taki, że

$$A, B \in \mathcal{R} \Rightarrow A \cup B \in \mathcal{R}, A \cap B \in \mathcal{R} \quad (\text{wynika z tego, że } A \cap B \in \mathcal{R} \text{ bo } A \cap B = A \setminus (A \setminus B))$$

σ -algebra zbiorów - jeśli zachodzi to co powyżej +

$$(A_n)_{n \in \mathbb{N}} : A_n \in \mathcal{R} \Rightarrow \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \in \mathcal{R} \quad (\text{wynika z tego } \bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n \in \mathcal{R})$$

Zbiory $\mathcal{I}$ -miernalne stanowią algebrę zbiorów ale nie stanowią σ -algebry.

Rozważać będziemy funkcje na $\mathcal{R}$ o wartościach w $\mathbb{R}_{\geq 0} \cup \{+\infty\}$ addytywne, tzn takie, że jeśli $A \cap B = \emptyset$ to

$$\varphi(A \cup B) = \varphi(A) + \varphi(B)$$

Z rozważań w kluczowej funkcji stała równo $+\infty$. Funkcję nazywamy **przeizalnie addytywną** jeśli dla $A_i \cap A_j = \emptyset$ mamy

$$\varphi\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi(A_n)$$

WŁASNOŚCI FUNKCJI ADDYTYWNYCH:

$$\varphi(\emptyset) = 0$$

$$A_i \cap A_j = \emptyset \Rightarrow \varphi(A_1 \cup \dots \cup A_n) = \varphi(A_1) + \dots + \varphi(A_n)$$

$$\varphi(A \cup B) = \varphi(A) + \varphi(B) - \varphi(A \cap B)$$

$$A \subset B \Rightarrow \varphi(A) \leq \varphi(B)$$

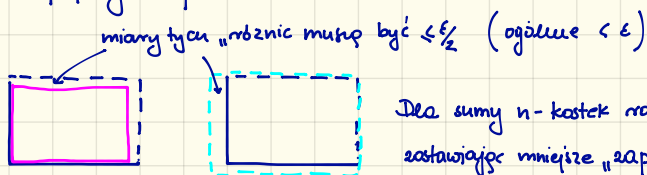
$$A \subset B \text{ i } \varphi(A) < \infty \Rightarrow \varphi(B \setminus A) = \varphi(B) - \varphi(A)$$

Naszym zadaniem jest skonstruowanie miary Lebesgue'a czyli rozszerzenie pojęcia miary kostki w taki sposób aby dowolna funkcja była przeliczalnie addytywne na odpowiedniej σ -algebrze zbiorów. Musimy więc oprócz samej miary zdefiniować też zbiory mierzalne.

Zaczynamy od kostek: $D = I_1 \times \dots \times I_n$ gdzie I jest odcinkiem otwartym, domkniętym lub dwucyfrowym. Innymi słowy kostka nie musi być domknięta. $m(D) = \prod_{i=1}^n |I_i|$

Zbiór elementarny to suma skończonej liczby kostek. Rodzinę zbiorów elementarnych oznaczamy $\mathcal{E}$. $\mathcal{E}$ jest algebrą zbiorów ale nie jest σ -algebrą. Każdy zbiór elementarny można przedstawić jako sumę nieprzecinających się kostek. Miarę z kostek na $\mathcal{E}$ rozszerzamy przez addytywność. Funkcja m jest regularna, tzn dla każdego $A \in \mathcal{E}$ i dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieje $\Theta, K \in \mathcal{E}$ Θ -otwarty, K -domknięty i taki, że $K \subset A \subset \Theta$ $m(\Theta) - \varepsilon \leq m(A) \leq m(K) + \varepsilon$.

Dla pojedynczej kostki takto:



Dla sumy n -kostek robimy podobnie zostawiając mniejsze „zapasy”

Konstrukcja miary Lebesgue'a opiera się na następującym fakcie: każda addytywna, dodatnia i regularna funkcja na $\mathcal{E}$ może być rozszerzona do przeliczalnie addytywnej funkcji określonej na σ -algebrze zawierającej $\mathcal{E}$.

Zbiory elementarne E

FAKT:

START:

$$f: E \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0} \cup \{\infty\}$$

dodatnio, addytywna, regularna
funkcja na E
(np $f=m$)

$\rightarrow$ miara zewnętrzna $\rightarrow A \in E$
 f^*
 $f^*(A) = f(A)$

FAKT

$$F = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$$

$$f^*(F) \leq \sum f^*(F_n)$$

$$F_n \rightarrow F$$

$$\text{jeśli } \lim_{n \rightarrow \infty} d(F_n, F) = 0$$

odległość zbiorów

$$f^*\left(\bigcap_{i=1}^n F_i \triangle G\right) \\ d(\bar{F}, G)$$



zbiory skończone

f -mierzalne $\mathcal{U}_F(f)$

zbiory f -mierzalne $\mathcal{U}(f)$

TWIERDZENIE

$\mathcal{U}(f)$ jest σ -algebrą

f^* jest σ -addytywna
na $\mathcal{U}(f)$

$\rightarrow$ dla $f=m$ otrzymujemy
miarę Lebesgue'a
oznaczoną μ .
KONIEC