WYKŁAD 26

KONSTRUKCJA MIARY LEBESGUE'A

10.06.2016

KONSTRUKCJA MIARY LEBESGUE'A

Krok 0 – punkt startowy – zbiory elementarne

$I_1, \dots, I_n$ – odcinki w $\mathbb{R}$ dowolne w sensie otwartości, domkniętości.

$D = I_1 \times \dots \times I_n$ – kostka

E – zbiór elementarny – skończona suma kostek

$\mathcal{E}$ – zbiór zbiorów elementarnych

$m(D) = |I_1| \cdot \dots \cdot |I_n|$ miara kostki

→ każdy zbiór elementarny można rozłożyć na skończoną sumę rozłącznych kostek, zatem m można rozszerzyć na $\mathcal{E}$

$$m(E) = m(D_1) + \dots + m(D_n) \qquad D_i \cap D_j = \emptyset$$

→ $\mathcal{E}$ jest algebrą zbiorów ale nie jest σ algebrą

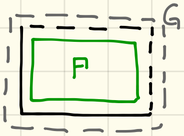
→ m jest addytywna na $\mathcal{E}$

→ m jest regularna, co oznacza, że $\forall E \subset \mathcal{E}$ $\exists$ $F, G \in \mathcal{E}$, F domknięty G otwarty takie, że

$$F \subset E \subset G$$

$$m(G) - \varepsilon \leqslant m(E) \leqslant m(G) + \varepsilon$$

Jeśli E jest kostką to sytuacja jest oczywista



$$E = I_1 \times \dots \times I_n$$

$$I_j = (a_j, b_j) \qquad (\;=\; [\text{ lub }] \qquad) \;=\;] \text{ lub }]$$

$F = [a_1+\delta,\ b_1-\delta] \times \dots \times [a_n+\delta,\ b_n-\delta]$ δ dobieramy tak aby

$m(E) - m(F) \leqslant 2 \cdot n \cdot \delta \cdot \max_j |I_j|$ wystarczy wziąć $\varepsilon = 4n\delta \max_j |I_j|$ $\delta = \frac{\varepsilon}{4n \max_j |I_j|}$

podobnie dla G. Dla sum kostek jako F bierzemy sumę F_k dla poszczególnych kostek a jako G sumę G_k. Trzeba też N razy zmniejzeszyt 8.

2

Krok 1. Konstrukcja miary zewnętrznej:

$X\subset\mathbb{R}^n$ dowolny. Weźmy E_k – przeliczalne pokrycie X otwartymi elementarnymi:

$$X\subset\bigcup_{k=1}^{\infty}E_k$$

Definiujemy $\mu^*(X)=\inf\sum_{k=1}^{\infty}m(E_n)$. Infimum wyznaczamy po wszystkich takich pokryciach.

μ^* nazywa się miarą zewnętrzną zbioru X. Może być ∞.

WŁASNOŚCI MIARY ZEWNĘTRZNEJ

1. $\mu^*(X)\geq 0$ – oczywiste
2. $X_1\subset X_2 \Rightarrow \mu^*(X_1)\leq\mu^*(X_2)$ – oczywiste
3. Jeśli $E\subset\mathcal{E}$ to $\mu^*(E)=\mu(E)$

DOWÓD: Trzeba pokazać, że $\mu^*(E)\leq m(E)$ i że $\mu^*(E)\geq\mu(E)$.
Z regularności miary wynika, że $E\subset G$, G otwarty i $G\in\mathcal{E}$
$m(G)\leq m(E)+\varepsilon$ G jest jednoelementowym pokryciem E, zatem $\mu^*(E)\leq m(G)$

$\mu^*(E)\leq m(G)\leq m(E)+\varepsilon$ ale ε dowolne więc $\mu^*(E)\leq m(E)$.

Z definicji infimum istnieje (E_k) takie, że dla dowolnego $\varepsilon>0$ mamy $\mu^*(E)+\varepsilon\geq\sum m(E_k)$

Z drugiej strony istnieje F ~~zwarte~~ zawarte w E takie że $m(F)+\varepsilon>m(E)$
E_k jest pokryciem F – można wybrać podpokrycie skończone, tzn
$F\subset E_1\cup\dots\cup E_N$

$$m(E) \leqslant m(F)+\varepsilon \leqslant m(E_1 \cup \dots \cup E_N)+\varepsilon \leqslant \sum_{k=1}^{N} m(E_k) + \varepsilon \leqslant \mu^*(E)+2\varepsilon$$ 3

$$m(E) \leqslant \mu^*(E)+2\varepsilon$$

ε dowolne $\Rightarrow$ $m(E) \leqslant \mu^*(E)$ ∎

(4) Jeśli $X = \bigcup_{k=1}^{\infty} X_k$ to $\mu^*(X) \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} \mu^*(X_n)$

Dowodzenie ma sens jeśli wszystkie $\mu^*(X_n)$ są $< \infty$. Załóżmy że tak jest. Ustalamy $\varepsilon > 0$ i bierzemy (E_{kl}) $X_k \subset \bigcup_l E_{kl}$ takie, że

$$\sum_l m(E_{kl}) \leq \mu^*(X_k) + 2^{-k}\varepsilon$$

$$\mu^*(X) \leqslant \sum_k \sum_l m(E_{kl}) \leqslant \sum_k \mu^*(X_k) + \varepsilon$$ z dowolności ε wynika

$$\mu^*(X) \leqslant \sum_k \mu^*(X_k)$$ ∎

Mamy kandydata na miarę Lebesgue'a. Jest to miara zewnętrzna. Trzeba jeszcze wybrać dobre zbiory mierzalne, tak żeby μ^* ograniczone do tych zbiorów miało dobre własności.

Krok 3 - konstrukcja σ-algebry zbiorów mierzalnych.

Przypomnienie $A \div B = (A \setminus B) - (B \setminus A)$: różnica symetryczna zbiorów. Definiujemy funkcję na parach podzbiorów $\mathbb{R}^n$ wzorem

$$d(X,Y) = \mu^*(X \div Y)$$ Tę funkcję będziemy traktować jak odległość, tzn w szczególności będziemy pisać

$$X_k \longrightarrow X \text{ jeśli } d(X, X_k) \longrightarrow 0$$

Definiujemy zbiory skończenie μ-mierzalne : granice, w powyższym sensie, ciągów zbiorów elementarnych $M_F(\mathbb{R}^n)$

Zbiory μ-mierzalne są to przeliczalne sumy zbiorów skończenie μ-mierzalnych $\mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$ 4

TWIERDZENIE $\mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$ jest σ-algebrą a μ^* jest przeliczalnie addytywne na $\mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$

DOWÓD: Zacznijmy od lematu dotyczącego odległości d.

LEMAT: d jest pseudometryką, tzn spełnia warunki metryki z wyjątkiem warunku $d(A,B)=0 \Rightarrow A=B$.

DOWÓD Metryka spełnia warunki

$\rho \geq 0$ ← to mamy

$\rho(x,x)=0$ ← to mamy bo $A \div A = \emptyset$ $\mu^*(\emptyset)=0$

$\rho(x,y)=0 \Rightarrow x=y$

$\rho(x,y)=\rho(y,x)$ ← to mamy bo $A \div B = B \div A$

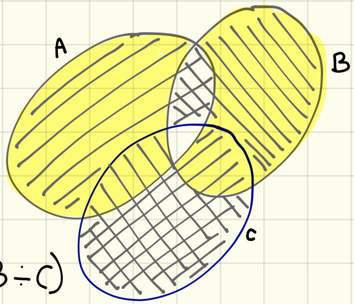
$\rho(x,z) \leq \rho(x,y)+\rho(y,z)$ ← to jak zwykle najtrudniejsze

$$d(A,B) \overset{?}{\leq} d(A,C)+d(C,B) \qquad \mu^*(A \div B) \leq \mu^*(A \div C)+\mu^*(C \div B)$$

$$A \div C \cup C \div B = A \cup B \cup C \setminus (A \cap B \cap C)$$

$$\Downarrow$$

$$A \div B \subset A \div C \cup C \div B$$



$$\mu^*(A \div B) \leq \mu(A \div C \cup B \div C)$$

$$\leq \mu^*(A \div C) + \mu^*(B \div C)$$

■

5

LEMAT: (1) $d(A_1 \cup A_2, B_1 \cup B_2) \leqslant d(A_1, B_1) + d(A_2, B_2)$

$d(A_1 \cap A_2, B_1 \cap B_2) \leqslant d(A_1, B_1) + d(A_2, B_2)$

$d(A_1 \setminus A_2, B_1 \setminus B_2) \leqslant d(A_1, B_1) + d(A_2, B_2)$

DOWÓD: stosowne obrazki i zawieranie.

Co to znaczy, że $d(A,B)=0$? $\mu^*(A,B)=0$ $\mu^*(A \div B)=0$ tzn $\forall \varepsilon>0\ \exists E_k\ \sum_k m(E_k) < \varepsilon$ i $A \div B \subset \bigcup_k E_k$ – tzn. $A \div B$ jest zbiorem miary zero w poprzednim sensie.

W $2^{\mathbb{R}^n}$ wprowadzamy relację równoważności $A \sim B \iff d(A,B)=0$

$2^{\mathbb{R}^n}/\sim$ jest przestrzenią metryczną. W tym sensie $m_F/\sim$ jest domknięciem $\mathcal{E}/\sim$.

LEMAT Jeśli przynajmniej jedna z liczb $\mu^*(X), \mu^*(Y)$ jest skończona, to $|\mu^*(X) - \mu^*(Y)| \leqslant d(X \div Y)$

DOWÓD

$0 \leqslant \mu^*(Y) \leqslant \mu^*(X)$ $\quad d(X,\emptyset) = \mu^*(X) \leqslant d(X,Y) + d(Y,\emptyset) = d(X,Y) + \mu^*(Y)$

$\mu^*(Y) < \infty \implies \mu^*(X) - \mu^*(Y) \leqslant d(X,Y)$ ■

DOWÓD TWIERDZENIA

Pokażemy najpierw, że $m_F(\mathbb{R}^n)$ jest algebrą zbiorów a μ^* jest przeliczalnie addytywna

$X, Y \in m_F$, $X_k \to X$ $Y_k \to Y$ $X_k \in \mathcal{E}, Y_k \in \mathcal{E}$

Z lematu (2) wynika $X_k \cup Y_k \to X \cup Y$, $X_k \cap Y_k \to X \cap Y$, $X_k - Y_k \to X - Y$

$d(X_k \cup Y_k, X \cup Y) \leqslant d(X_k, X) + d(Y_k, Y)$ ... itd.

$\mu^*(X_k) < \infty$ i z lematu (3) $|\mu^*(X) - \mu^*(X_k)| \leqslant d(X, X_k) \longrightarrow 0$

zatem $\mu^*(X) < \infty$

$X_k, Y_k \subset \mathcal{E}$ zatem $m(X_k) + m(Y_k) = m(X_k \cup Y_k) + m(X_k \cap Y_k)$

$$\downarrow \qquad \downarrow \qquad \downarrow \qquad \downarrow$$

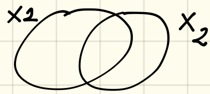
$$\mu^*(X) \qquad \mu^*(Y) \qquad \mu^*(X \cup Y) \qquad \mu^*(X \cap Y)$$

zatem jeśli $X \cap Y = \emptyset$ to

$\mu^*(X \cup Y) = \mu^*(X) + \mu^*(Y)$ → addytywność → przeliczalna addytywność

$\mathfrak{M}(\mathbb{R}^n)$ jest powiększeniem $\mathfrak{M}_F(\mathbb{R}^n)$ o przeliczalne sumy elementów z $\mathfrak{M}_F$ więc jest σ-algebrą. Potrzebujemy przeliczalną addytywność μ^*

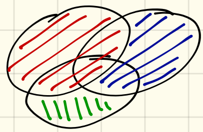
$X \in \mathfrak{M}(\mathbb{R}^n)$ wtedy $X = \bigcup \bar{X}_k$ $X_k \in \mathfrak{M}_F$. $(\bar{X}_k)$ można zastąpić rodziną rozłącznych zbiorów



$X_1 = \bar{X}_1$, $X_2 = (\bar{X}_1 \cup \bar{X}_2) \setminus \bar{X}_1$

$X_3 = (\bar{X}_1 \cup \bar{X}_2 \cup \bar{X}_3) \setminus (\bar{X}_1 \cup \bar{X}_2)$

$\vdots$



$X = \bigcup_k X_k$ i (X_k) parami rozłączne

Dowodziliśmy wcześniej, że $\mu^*(X) \leq \sum_k \mu^*(X_k)$

$X \supset X_1 \cup \dots \cup X_k$ $\mu^*(X_1 \cup \dots \cup X_k) = \mu^*(X_1) + \dots + \mu^*(X_k)$

$\mu^*(X) \geq \mu^*(X_1 \cup \dots \cup X_k)$ zatem $\boxed{\mu^*(X) = \sum_k \mu^*(X_k)}$

Jeśli $X \in \mathfrak{M}(\mathbb{R}^n)$ i $\mu^*(X)$ skończone to $X \in \mathfrak{M}_F(\mathbb{R}^n)$. Istotnie

$$d\left(X, \bigcup_{k=1}^{N} X_k\right) = \mu^*\left(\bigcup_{k=N+1}^{\infty} X_k\right) = \sum_{k=N+1}^{\infty} \mu^*(X_k) \xrightarrow[N \to \infty]{} 0 \quad \text{tzn} \quad \bigcup_{k=1}^{N} X_k \longrightarrow X$$

a skoro $\bigcup_{k=1}^{N} X_k \in \mathfrak{M}_F$ to $X \in \mathfrak{M}_F$.

Zatem jeśli $X = \bigcup X_k$ i $\mu^*(X_k)$ skończone to $X_k \in \mathfrak{M}_F$ i równość pokazaliśmy. Jeśli któreś z $\mu^*(X_k) = \infty$ to równość też zachodzi.

Przestajemy więc pisać μ^*, piszemy μ dla elementów $\mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$ i funkcję tę nazywamy miarą Lebesgue'a. $\blacksquare$

7