WYKŁAD 27

Funkcje mierzalne, Całka Lebesgue'a

14.06.2016

JAKIE ZBIORY SĄ MIERZALNE? ... WIĘKSZOŚĆ TAKICH Z KTÓRYMI MAMY DO CZYNIENIA

1

FAKT: Mierzalne są zbiory otwarte, zbiory domknięte, zbiory miary Lesbegue'a zero. Miara zbioru miary Lesbegue'a zero (w/g poprzedniej definicji) jest zero. Zbiór miary zewnętrznej zero jest mierzalny i jest zbiorem miary Lesbegue'a zero w/g poprzedniej definicji

DOWÓD: Zbiór otwarty jest sumą otwartych kul. W metryce maksimum kule są kostkami, więc zbiór otwarty jest sumą otwartych kostek. Można się ograniczyć do kostek, które zbudowane są z odcinków o wymiernych końcach. Odcinków o wymiernych końcach jest przeliczalnie wiele - zbiór otwarty w R^n jest sumą przeliczalnej liczby kostek - zatem jest mierzalny.

Zbiór domknięty $D = \mathbb{R}^n \setminus \underbrace{\mathcal{O}}_{\text{otwarty}}$ $\mathbb{R}^n$ też jest mierzalny, zatem D jest mierzalny.

Weźmy teraz A - zbiór miary Lesbegue'a zero: Dla $\varepsilon > 0$ Istnieje rodzina D_i kostek taka, że

$$A \subset \bigcup_{i \in \mathbb{N}} D_i \quad i \quad \sum_{i=1}^{\infty} m(D_i) < \varepsilon$$

$$\mu^*(A) = d(A, \emptyset) \leq d(A, \bigcup D_i) + d(\bigcup D_i, \emptyset) = \mu^*(A \div \bigcup D_i) + \mu^*(\bigcup D_i) \leq$$

$$\leq \mu^*(\bigcup D_i \setminus A) + \mu^*(\bigcup D_i) \leq 2\mu^*(\bigcup_i D_i) \leq 2 \cdot \sum m(D_i) < 2\varepsilon$$

$d(A, \emptyset) < 2\varepsilon$ tzn $\emptyset \longrightarrow A$ i.e. A jest granicą ciągu stałego zbiorów pustych czyli należy do $\mathcal{M}_F$

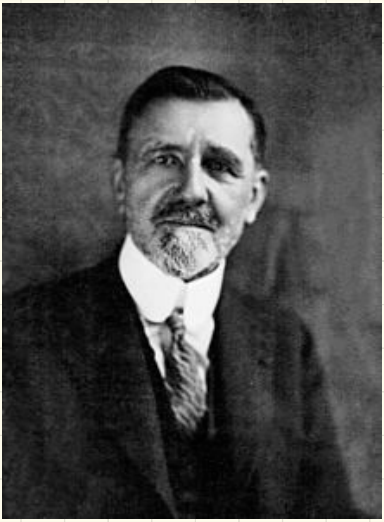
$\mu^*(A) < 2\varepsilon$ tzn $\mu^*(A) = 0$ co wraz z mierzalnością oznacza $\mu(A) = 0$

Na szczęście zbiory miary Lebesgue'a zero mają miarę zero co pozwala mam nie zwariować. 2

Niech teraz A będzie taki, że $\mu^*(A)=0$. Oznacza to, że dla $\varepsilon>0$ istnieje ciąg zbiorów elementarnych E_n taki, że $A\subset\bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n$ i $\sum_{n=1}^{\infty} m(E_n)<\varepsilon$. Każdy zbiór elementarny jest sumą skończonej liczby kostek. Sumę $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n$ można więc zastąpić $\bigcup_{k\in\mathbb{N}} D_k$ i $\sum_k m(E_n)=\sum_k m(D_k)$. Zatem A jest miary Lebesgue'a zero. Wykazaliśmy już że taki zbiór jest mierzalny. ∎

DEFINICJA: σ-algebrę generowaną przez rodzinę zbiorów otwartych nazywamy σ-algebrą zbiorów borelowskich. Elementy tej algebry to oczywiście zbiory borelowskie.

Do σ-algebry zbiorów borelowskich należą zbiory otwarte, domknięte i jeszcze całe mnóstwo ani takich, ani takich.



Émile Borel 1871 – 1956
Matematyk francuski
doktorat h.c. Uniwersytetu Warszawskiego 1930r.

Poprawność koncepcji σ-algebry zbiorów generowanych przez podzbiór wynika z faktu, że przecięcie dowolnej rodziny σ-algebr. Można więc pomyśleć o przecięciu wszystkich σ-algebr zawierających daną rodzinę zbiorów.

Henri Lebesgue 1875-1941

DEFINICJA Funkcję mierzalną w sensie Lesbegue'a nazywamy funkcję $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ taką, że $\forall a \in \mathbb{R}$ zbiór $\{x: f(x) > a\}$ jest mierzalny

Mierzalne są oczywiście funkcje ciągłe

bo $\{x: f(x) > a\} = f^{-1}(]a, \infty[)$

otwarty $\Leftarrow$ ciągła + otwarty

Mierzalne są także funkcje charakterystyczne zbiorów mierzalnych.

FAKT: Mierzalne są funkcje które spełniają jeden z poniższych warunków:

(1) $\forall a \in \mathbb{R}$ $\{x: f(x) \leq a\}$ jest mierzalny

(2) $\forall a \in \mathbb{R}$ $\{x: f(x) \geq a\}$ mierzalny

(3) $\forall a \in \mathbb{R}$ $\{x: f(x) < a\}$ mierzalny

DOWÓD:

Jeśli $\{x: f(x) \leq a\}$ jest mierzalny to jego dopełnienie też jest, a to dopełnienie to właśnie $\{x: f(x) > a\}$, czyli f mierzalna.

Ustalmy $b \in \mathbb{R}$. Mierzalne są zbiory $\{x: f(x) \geq \overset{a}{b} + \frac{1}{n}\}$. Ale $\{x: f(x) > b\} = \bigcap_n \{x: f(x) \geq b + \frac{1}{n}\}$ zatem jest mierzalny jako przecięcie przeliczalnej rodziny zbiorów mierzalnych.

Jeśli $\{x: f(x) < a\}$ jest mierzalny to $\{x: f(x) \geq a\}$ jest mierzalny (dopełnienie), zatem f mierzalna (poprzedni warunek) ∎

4

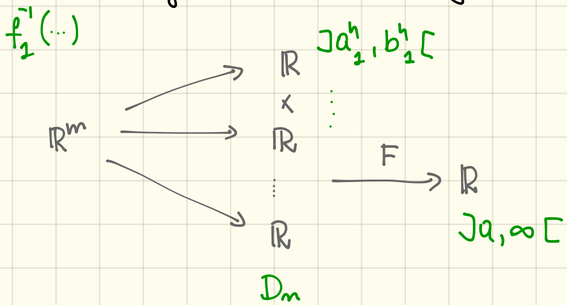
FAKT: Niech $f_i : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ będą mierzalne, $i = 1 \dots k$; $F : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ ciągła. Wówczas

$$g = F \circ (f_1 \dots f_k) : \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R} \text{ jest mierzalne.}$$

DOWÓD: Musimy wykazać mierzalność $g^{-1}(]a,\infty[)$. Zauważmy najpierw że $F^{-1}(]a,\infty[)$ jest otwarty w $\mathbb{R}^k$ zatem jest sumą przeliczalnej rodziny kostek $F^{-1}(]a,\infty[) = \bigcup_n D_n$.

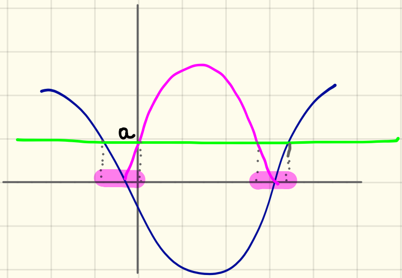
Weźmy $D_n =]a_1^n, b_1[\times \dots \times]a_k^n, b_k[$

$$\underbrace{f_i^{-1}(]a_i^n, b_i^n[)}_{\text{mierzalny} \ \Leftarrow} = \underbrace{f_i^{-1}(]a_i,\infty[)}_{\text{mierzalny}} \cap \underbrace{\left(f_i^{-1}(]-\infty, b[)\right)}_{\text{mierzalny}}$$



$$g^{-1}(]a,\infty[) = \bigcup_n \left(\bigcap_i f^{-1}(]a_i^n, b_i^n[) \right) \qquad \blacksquare$$

FAKT: f mierzalne $\Rightarrow$ $|f|$ mierzalne

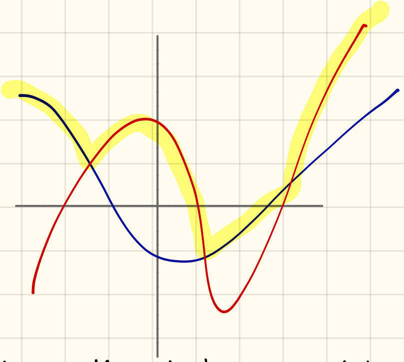


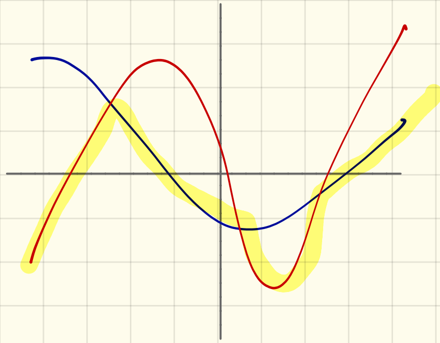
$$|f|^{-1}(]-\infty, a[) = f^{-1}(]-\infty, a[) \cap f^{-1}(]-a, \infty[)$$

albo korzystamy z faktu powyżej biorąc $k=1$ $f_1 = f$ $F(x) = |x|$

FAKT: f_1, f_2 mierzalne $g: g(x) = \max_i f_i(x)$ $h: g(x) = \min_i f(x)$ są mierzalne

5





Podobnie dla skończonej rodziny funkcji.

Korzystamy faktu powyżej biorąc $F(x,y) = \max(x,y)$, $F(x,y) = \min(x,y)$ odpowiednio. Na n funkcji uogólniamy w sposób oczywisty

FAKT: f, g mierzalne, wtedy $f+g$, $f \cdot g$, f/g mierzalne

Wynika z ciągłości $+, \cdot, (\cdot)^{-1}$ i poprzednich faktów.

Oznaczenia: $f^+(x) = \max\{f(x), 0\}$ $f^-(x) = \max\{-f(x), 0\}$; f^+, f^- są dodatnie, $f(x) = f^+(x) - f^-(x)$

CAŁKA LEBESGUE'A

Pracujemy na $\mathbb{R}^n$ z miarą μ. Niech f będzie dodatnią funkcją mierzalną. Niech także π będzie podziałem odcinka $[0, \infty[$, tzn. dany mamy ciąg $0 = a_0 < a_1 < a_2 < \dots$ $\lim a_n \to \infty$

$$S(\pi, f) = \sum_{i=1}^{\infty} a_i \mu(\{x : a_i \leq f(x) < a_i\})$$

Jest jasne, że dla $\pi' > \pi$

$$S(\pi', f) \geq S(\pi, f)$$

DEFINICJA Funkcję dodatnią, mierzalną nazywamy całkowalną w sensie Lebesgue'a jeśli ciąg uogólniony $S(\pi, f)$ ma skończoną granicę. Granicę tę oznaczamy $\int f d\mu$ i nazywamy całką Lebesgue'a z f.

DEFINICJA Funkcję mierzalną nazywamy całkowalną w sensie Lebesgue'a jeśli całkowalne są f^+ i f^-. Wówczas

$$\int f d\mu = \int f^+ d\mu - \int f^- d\mu$$

DEFINICJA Funkcję mierzalną f nazywamy całkowalną po zbiorze mierzalnym X jeśli $f \cdot \chi_X$ jest całkowalna w sensie poprzedniej definicji

$$\int_X f d\mu = \int f \chi_E d\mu \qquad \mathcal{L}(X, \mu) - \text{całkowalne na } X$$

RÓŻNE FAKTY I PRZYKŁADY:

(1)
TWIERDZENIE: Funkcje ograniczone i mierzalne na zbiorze $X : \mu(X) < \infty$ jest całkowalne na X

Zbiory J-mierzalne są mierzalne w sensie Lesbeque'a. Zbiory ograniczone i mierzalne mają skończoną miarę zatem funkcje całkowalne w sensie właściwej całki Riemanna są całkowalne w sensie Lebesque'a

(2)
Funkcja f jest całkowalna wtedy i tylko wtedy gdy $|f|$ jest całkowalna — nie ma pojęcia warunkowej zbieżności całki, np. funkcja Dirichleta nie jest całkowalna w sensie Lebesque'a.

(3) 7

TWIERDZENIE: (f_n) - ciąg funkcji całkowalnych $f_n \longrightarrow f$ μ-prawie wszędzie
g - całkowalna $|f_n| \leq g$ μ-prawie wszędzie. Wtedy f całkowalna i

$$\int f \, d\mu = \lim_{n \to \infty} \int f_n \, d\mu$$