WYKŁAD 3

POCHODNA MOCNA, POCHODNA SŁABA, PRZYKŁADY

5.03.2016

Założenie $A_2 \neq A_1$ doprowadziło do sprzeczności, zatem udowodniliśmy fakt:

FAKT: Jeśli f jest różniczkowalne w x_0, to odwzorowanie $A \in B(X,Y)$ takie, że $\|R(x,h)\|/_{\|h\|} \xrightarrow[h \to 0]{} 0$ jest wyznaczone jednoznacznie.

Odwzorowanie to nazywać będziemy pochodną f w punkcie x i oznaczać $f'(x)$. Zauważmy, że jeżeli f jest różniczkowalne w każdym punkcie pewnego zbioru otwartego $U \subset X$ to pochodna jest odwzorowaniem

$$X \supset U \xrightarrow{f'} B(X,Y)$$ podczas kiedy wyjściowe odwzorowanie to

to są różne byty matematyczne.

$$X \ni U \xrightarrow{f} Y$$

Pochodną zdefiniowaną jak wyżej nazywa się także pochodną mocną, pochodną Fréche'ta.

PRZYKŁAD: $X = C([0,1])$ z normą supremum $f : X \to X$

$$f(v)(t) = \int_0^t v^2(s)\,ds$$

$$f(v+h)(t) = \int_0^t (v+h)^2(s)\,ds = \int_0^t \left(v^2(s) + 2v(s)h(s) + h^2(s) \right) ds =$$

15

$$f(v+h)(t) = \int_0^t (v+h)^2(s)\,ds = \int_0^t \left(v^2(s) + 2v(s)h(s) + h^2(s) \right) ds =$$

$$= \underbrace{\int_0^t v^2(s)\,ds}_{f(v)(t)} + 2\int_0^t v(s)h(s)\,ds + \int_0^t h^2(s)\,ds$$

reszte?

liniowe ze wzgl. na h

$T \in \mathcal{L}(X,X)$ $\quad (Th)(t) = 2\int_0^t v(s)h(s)\,ds \qquad R(v,h)(t) = \int_0^t h^2(s)\,ds$

Należy sprawdzić, czy $T \in B(X)$ i czy R jest resztą.

Weźmy więc h_n takie że $h_n \to 0$, tzn $\sup_s |h_n(s)| \xrightarrow{n\to\infty} 0$. Wtedy

$$\|Th_n\| = \sup_t \left| 2\int_0^t v(s)h_n(s)\,ds \right| \leq 2 \sup_t \int_0^t |v(s)h_n(s)|\,ds \leq 2\int_0^1 |v(s)h_n(s)|\,ds$$

$$\leq \sup_s |h_n(s)| \underbrace{\int_0^1 |v(s)|\,ds}_{\text{stałe, zależne jedynie od } v} = \|h_n\| \int_0^1 |v(s)|\,ds \xrightarrow[\|h_n\|\to 0]{} 0$$

T jest więc odwzorowaniem ciągłym.

$$\|R(v,h)\| = \sup_t |R(v,h)(t)| = \sup_t \left| \int_0^t h^2(s)\,ds \right| \leq \sup_t \int_0^t h^2(s)\,ds = \int_0^1 h^2(s)\,ds \leq$$

$$\|h\|^2 \int_0^1 ds = \|h\|^2$$

$$\frac{\|R(v,h)\|}{\|h\|} \leq \frac{\|h\|^2}{\|h\|} = \|h\| \longrightarrow 0 \quad \text{o.k.}$$

Odwzorowanie f jest różniczkowalne. Jego pochodna w punkcie $v \in X$ dana jest wzorem

$$(f'(v)h)(t) = \int_0^t v(s)h(s)\,ds.$$

PRZYKŁAD (skończeniewymiarowy)

$\mathbb{R}^2 \ni (x,y) \xmapsto{g} x\cos y \in \mathbb{R}$

$$(x+\delta x)\cos(y+\delta y) = (x+\delta x)(\cos y\cos\delta y - \sin y \sin\delta y) = (x+\delta x)\Big(\cos y\Big[1-\tfrac{1}{2}\delta y^2 + O(\delta y^4)\Big]$$
$$- \sin y\Big[\delta y - \tfrac{1}{6}\delta y^3 + O(\delta y^5)\Big]\Big) =$$

$$= (x+\delta x)\Big(\cos y - \tfrac{1}{2}\cos y\,\delta y^2 - \sin y\,\delta y + \tfrac{1}{6}\sin y\,\delta y^3 + O(\delta y^4)\Big) =$$

$$= x\cos y + \cos y\,\delta x - x\sin y\,\delta y + \Big[\tfrac{x}{2}\cos y\,\underline{\delta y^2} - \tfrac{1}{2}\cos y\,\delta y^2\delta x - \sin y\,\underline{\delta y\,\delta x} + \tfrac{1}{6}x\sin y\,\delta y^3$$
$$+ \tfrac{1}{6}\sin y\,\delta y^3\delta x + x\,O(\delta y^4) + \delta x\,O(\delta y^4)\Big] =$$

$$= x\cos y + \begin{bmatrix}\cos y & -x\sin y\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\delta x\\ \delta y\end{bmatrix} + R(x,y,\delta x,\delta y)$$

przynajmniej kwadratowe w $\delta x, \delta y$

W $\mathbb{R}^2$ wybieramy normę maksimum, zatem $\left\|\begin{bmatrix}\delta x\\ \delta y\end{bmatrix}\right\| = \max\{|\delta x|, |\delta y|\}$

jeśli $\left\|\begin{bmatrix}\delta x\\ \delta y\end{bmatrix}\right\| \to 0$ to znaczy $\max\{|\delta x|,|\delta y|\} \to 0$ czyli $|\delta x| \to 0$ i $|\delta y| \to 0$

$$\frac{|\delta y|^2}{\max\{|\delta x|,|\delta y|\}} \leq \frac{|\delta y|^2}{|\delta y|} = |\delta y| \to 0 \qquad \text{podobnie} \qquad \frac{|\delta x\,\delta y|}{\max\{|\delta x|,|\delta y|\}} \leq \frac{|\delta x||\delta y|}{|\delta y|} = |\delta x| \to 0$$

Reszta jest więc resztą, ciągłości odwzorowania liniowego

$\begin{bmatrix}\delta x\\ \delta y\end{bmatrix} \longmapsto \begin{bmatrix}\cos y & -x\sin y\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\delta x\\ \delta y\end{bmatrix}$ nie trzeba sprawdzać, bo przestrzenie są wymiaru skończonego.

$$g'(x,y) = \begin{bmatrix}\cos y & -x\sin y\end{bmatrix}$$

Różne uwagi:

(1) Odwzorowanie $X \to Y$ różniczkowalne w $x \in X$ jest ciągłe w x – oczywiste, bo skoro $R(x,h)$ jest resztą to $R(x,h) \xrightarrow[h\to 0]{} 0$

(2) Jeśli $T: X \to Y$ jest elementem $B(X,Y)$ to T jest różniczkowalne w każdym punkcie i $T'(x) = T$ dla dowolnego x.

(3) Jeśli $f, g : X \to Y$ są różniczkowalne w x to $\alpha f + \beta g$ też jest różniczkowalne w x i $(\alpha f + \beta g)'(x) = \alpha f'(x) + \beta g'(x)$.
– dowód łatwy i nudny.

(4) Z zestawu „podstawowe prawa różniczkowania" pewnej uwagi wymaga różniczkowanie mieco uwagi wymaga różniczkowanie złożenia:

FAKT: $f : X \to Y$ $g : Y \to Z$, f różniczkowalne w x, g różniczkowalne w $f(x)$. Wtedy $g \circ f$ różniczkowalne w x i

$$(g \circ f)'(x) = \underset{\in B(Y,Z)}{g'(f(x))} \cdot \underset{\in B(X,Y)}{f'(x)}$$

składanie odwzorowań liniowych.

DOWÓD:

$$f(x+h) = f(x) + f'(x)h + r_f(x,h)$$
$$g(f(x)+k) = g(f(x)) + g'(f(x))k + r_g(f(x),k)$$

$$g(f(x+h)) = g\big(f(x) + \underbrace{f'(x)h + r_f(x,h)}_{k}\big) = g(f(x)) + g'(f(x))\big(f'(x)h + r_f(x,h)\big) +$$
$$+ r_g\big(f(x), f'(x)h + r_f(x,h)\big) =$$
$$= g(f(x)) + \boxed{g'(f(x))f'(x)\cdot h} + g'(f(x))r_f(x,h) + r_g\big(f(x), f'(x)h + r_f(x,h)\big)$$

$$\frac{\|g'(f(x))r_f(x,h)\|}{\|h\|} \leq \|g'(f(x))\| \frac{\|r_f(x,h)\|}{\|h\|} \xrightarrow[h \to 0]{} 0$$

$g'(f(x)) \in B(Y,Z)$

$\to 0$

$$\frac{\|r_g(f(x), f'(x)h + r_f(x,h))\|}{\|h\|} = \underbrace{\frac{\|r_g(f(x), f'(x)h + r_f(x,h))\|}{\|f'(x)h + r_f(x,h)\|}}_{\xrightarrow[h\to 0]{} 0} \cdot \frac{\|f'(x)h + r_f(x,h)\|}{\|h\|}$$

Wiadomo, że gdy $h \to 0$ to $f'(x)h + r_f(x,h)$ też $\to 0$ zatem z różn. g wynika.

$$\frac{\|f'(x)h + r_f(x,h)\|}{\|h\|} \leqslant \frac{\|f'(x)h\|}{\|h\|} + \frac{\|r_f(x,h)\|}{\|h\|} \leqslant \|f'(x)\| + \underbrace{\frac{\|r_f(x,h)\|}{\|h\|}}_{\text{ta część} \longrightarrow 0} \quad (*)$$

18

zatem dla wystarczająco małych h $(*) \leqslant 2\cdot\|f'(x)\|$

ostatecznie więc $\dfrac{\| r_g(f(x), f'(x)h + r_f(x,h))\|}{\|h\|} \longrightarrow 0.$ ■

FAKT: $f: X \longrightarrow Y$, $\alpha: X \longrightarrow \mathbb{R}$. Jeśli f różniczkowalne w $x \in X$ i α różniczkowalne w $x \in \mathbb{R}$ to odwzorowanie $x \longmapsto \alpha(x)\cdot f(x)$ jest różniczkowalne w x i

mnożenie przez liczbę w Y

$$(\alpha f)'(x) = \alpha'(x)\cdot f(x) + \alpha(x)\cdot f'(x)$$

$\alpha'(x) \in B(X,\mathbb{R})$, $f(x) \in Y$, $\alpha(x) \in \mathbb{R}$, $f'(x) \in B(X,Y)$

$\underbrace{\alpha'(x)\cdot f(x)}_{\text{jest to odwzorowanie liniowe}}$

$$X \ni h \longmapsto (\alpha'(x)h)\cdot f(x) \in Y$$

DOWÓD: $\alpha(x+h) = \alpha(x) + \alpha'(x)h + r_\alpha(x,h)$ $\quad f(x+h) = f(x) + f'(x)h + r_f(x,h)$

$$\alpha(x+h)f(x+h) = [\alpha(x) + \alpha'(x)\cdot h + r_\alpha(x,h)][f(x) + f'(x)h + r_f(x,h)] =$$

$$= \alpha(x)f(x) + \boxed{[\alpha'(x)h]f(x) + \alpha(x)f'(x)h} + \boxed{[\alpha'(x)h]f'(x)h + r_\alpha(x,h)f(x) + \alpha(x)r_f(x,h) + \alpha'(x)h\cdot r_f(x,h) + r_\alpha(x,h)f'(x)h + r_\alpha(x,h)r_f(x,h)}$$

to na zielono to pochodna, to na szaro to reszta:

$$\frac{\|[\alpha'(x)h]f'(x)h\|}{\|h\|} = \frac{|\alpha'(x)h|\,\|f'(x)h\|}{\|h\|} \leqslant \frac{\|\alpha'(x)\|\,\|h\|\,\|f'(x)\|\,\cancel{\|h\|}}{\cancel{\|h\|}} \xrightarrow{\|h\|\to 0} 0$$

itd dla każdego członu. Korzystamy z ciągłości $\alpha'(x)$, $f'(x)$ oraz z tego, że $r_\alpha(x,h)$, $r_f(x,h)$, $\dfrac{|r_\alpha(x,h)|}{\|h\|}$, $\dfrac{\|r_f(x,h)\|}{\|h\|}$ znikają. ■

Szukanie pochodnej z definicji jest zazwyczaj dość niepraktyczne. Wprowadzimy teraz pewne dodatkowe pojęcia, które ułatwią praktyczne poszukiwanie pochodnej.

19

POCHODNE KIERUNKOWE:

X, Y - przestrzenie Banacha, $\mathcal{U} \subset X$, $x \in \mathcal{U}$, $v \in X$, $f: \mathcal{U} \longrightarrow Y$.

Mówimy, że odwzorowanie f ma pochodną kierunkową w kierunku v jeśli istnieje

$$\lim_{t \to 0} \frac{f(x+tv) - f(x)}{t}.$$

Pochodną kierunkową oznaczamy $\nabla_v f(x)$.

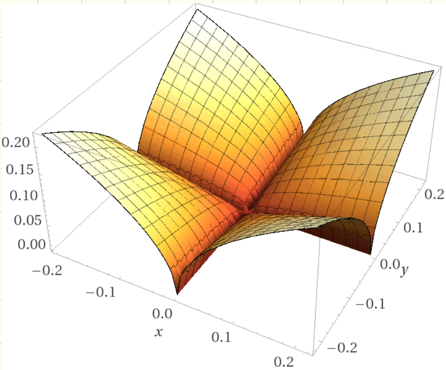
Pochodna kierunkowa jest jednorodna, tzn $\nabla_{\lambda v} f(x) = \lambda \nabla_v f(x)$. Istotnie

$$\nabla_{\lambda v} f(x) = \lim_{t \to 0} \frac{f(x+t\lambda v) - f(x)}{t} = \lim_{t \to 0} \lambda \frac{f(x+(t\lambda)v) - f(x)}{t\lambda} = \lambda \lim_{s \to 0} \frac{f(x+sv) - f(x)}{s} =$$

$$= \lambda \nabla_v f(x)$$

Istnienie pochodnej kierunkowej jest stosunkowo słabym warunkiem na funkcję. Znaleźć można przykłady przeróżnych funkcji:

(i) $f(x,y) = \sqrt{|xy|}$ f ma pochodną kierunkową w kierunkach $\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$, w pozostałych kierunkach pochodna kierunkowa nie istnieje.



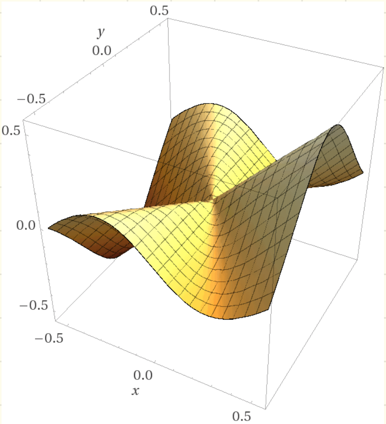
(ii) $g(x,y) = x\,\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$ $\quad g(0,0)=0$ $\quad$ Pochodne kierunkowe w (0,0) istnieje we wszystkich kierunkach, jednak odwzorowanie

$$X \ni v \longmapsto \nabla_v g(0,0) \text{ nie jest liniowe}$$

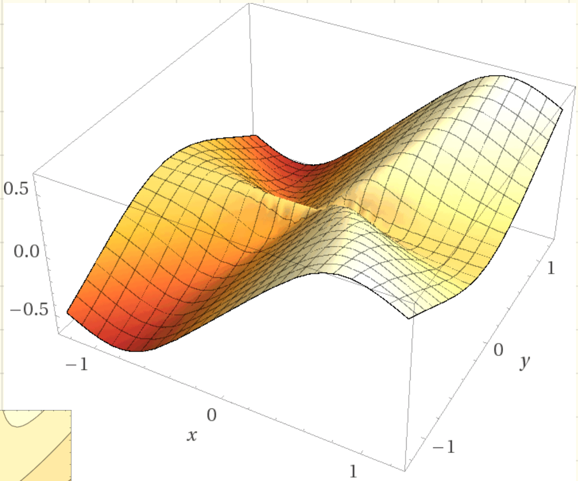
20

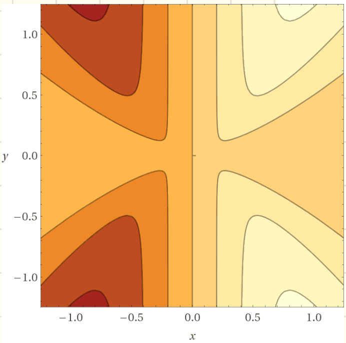
$$g(t\delta x, t\delta y) = t\delta x\,\frac{t^2\delta x^2 - t^2\delta y^2}{t^2\delta x^2 + t^2\delta y^2} = t\,\delta x\left(\frac{\delta x^2-\delta y^2}{\delta x^2+\delta y^2}\right) \quad \nabla_v g(0,0) = \delta x\,\frac{\delta x^2-\delta y^2}{\delta x^2+\delta y^2}$$

$$g(x,ax) = x\,\frac{x^2-a^2x^2}{x^2+a^2x^2} = x\left(\frac{1-a^2}{1+a^2}\right)$$



(3) Rozważmy funkcję $h(x,y) = \dfrac{xy^2}{x^4+y^2}$
$h(0,0)=0.$





Zbadajmy pochodną kierunkową:

$$h(t\delta x, t\delta y) = \frac{t\delta x\, t^2\delta y^2}{t^4\delta x^4 + t^2\delta y^2} = t\,\frac{\delta x\,\delta y^2}{t^2\delta x^4 + \delta y^2} \qquad v = \begin{bmatrix}\delta x\\ \delta y\end{bmatrix}$$

$$\nabla_v h(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{\delta x\,\delta y^2}{t^2\delta x^4 + \delta y^2} = \frac{\delta x\,\delta y^2}{\delta y^2} = \delta x$$

Pochodna kierunkowa istnieje w każdym kierunku i odwzorowanie $v \longmapsto \nabla_v h(0,0)$ jest liniowe. Odwzorowanie nie jest jednak różniczkowalne w $(0,0)$

$$h(0+\delta x, 0+\delta y) = h(0,0) + [1,0]\begin{bmatrix}\delta x\\ \delta y\end{bmatrix} + R(\delta x, \delta y)$$

$$R(\delta x,\delta y) = \frac{\delta x\,\delta y^2}{\delta x^4 + \delta y^2} - \delta x = \frac{\delta x\cancel{\delta y^2} - \delta x^5 - \cancel{\delta x}\delta y^2}{\delta x^4 + \delta y^2} = \frac{\delta x^5}{\delta x^4 + \delta y^2}$$

weźmy teraz $v_n = \begin{bmatrix}1/n\\ 0\end{bmatrix}$ $\quad R(\frac{1}{n},0) = \frac{1/n^5}{1/n^4} = \frac{1}{n}$ $\qquad \|v_n\| = \frac{1}{n}$

$\frac{|R(v_n)|}{\|v_n\|} = \frac{1/n}{1/n} = 1$ zatem R nie jest resztą.

Mamy jednak oczywiście FAKT: Jeśli $f: U \to Y$ różniczkowalne w $x \in U$ to pochodna kierunkowa w x istnieje w każdym kierunku i $\nabla_v f(x) = f'(x)v$. Pochodna kierunkowa jest oczywiście liniowa względem kierunku.

Jak pokazuje przykład (iii) wynikanie w drugą stronę nie zachodzi. Ma więc sens następująca definicja:

DEFINICJA: Jeśli dla $x \in U$ pochodna kierunkowa odwzorowania $f: U \longrightarrow Y$ istnieje w każdym kierunku i $v \longmapsto \nabla_v f(x)$ jest odwzorowaniem liniowym i ciągłym to mówimy że f jest słabo różniczkowalne w x. Odwzorowanie $v \longmapsto \nabla_v f(x)$ nazywamy wówczas słabą pochodną lub pochodną Gateaux.

UWAGA: Funkcja słabo różniczkowalna w punkcie nie musi nawet być ciągła w tym punkcie!