

WYKŁAD 4

MACIERZ JACOBIEGO, TW. O WART. ŚREDNIEJ,
ODHĄZOROWANIA WIELOLINIOWE

.

WTOREK, 8.03.2016

POCHODNE CZĄSTKOWE w kierunku podprzestrzeni.

Rozważmy teraz szczególną sytuację, gdy $f: U \rightarrow Y$ $X = X_1 \times X_2$ $U \ni x = (x_1, x_2)$
 Zbiór U zawiera $U_1 \times U_2$ gdzie U_1, U_2 są otwartymi domeniami x_1, x_2 .

Pochodną cząstkową w kierunku X_1 w punkcie x nazywamy pochodną odwzorowania

$$X_1 \supset U_1 \ni \xi \longmapsto f(\xi, x_2) \in Y \quad \text{w} \quad \xi = x_1$$

Pochodną tę oznaczymy $f'_{X_1}(x_1, x_2)$. $f'_{X_1}(x_1, x_2) \in \mathcal{B}(X_1, Y)$

Mamy ciekawy **FAKT**: jeśli f jest różniczkowalne w (x_1, x_2) to istnieje pochodne cząstkowe w kierunku X_1 i X_2 oraz

$$f'_{X_1}(x_1, x_2)h_1 = f'(x_1, x_2)(h_1, 0),$$

$$f'_{X_2}(x_1, x_2)h_2 = f'(x_1, x_2)(0, h_2), \quad f'(x_1, x_2)(h_1, h_2) = f'_{X_1}(x_1, x_2)h_1 + f'_{X_2}(x_1, x_2)h_2.$$

Podsumowując: mamy trzy rodzaje pochodnych: mocna (Frecheta), słaba (Gateaux) i pochodne cząstkowe. 2. istnienie pochodnej mocnej wynika istnieniem pozostałych. Sprawdzanie różniczkowalności z definicji byle paskudne – dobre byłoby wypracować łatwiejsze techniki. Zajmiemy się tym wkrótce. Najpierw jednak sprawdzimy jak wyglądają pochodne odwzorowania $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$. Założymy na chwilę że odwzorowanie to jest różniczkowalne. Spróbujemy praktycznie znaleźć pochodną.

POCHODNA ODWZOROWANIA $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$

$f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ tuż mamy m funkcji $f^i: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ $f^i(x_1, \dots, x_n)$.
 Założmy, że f jest różniczkowalne w ustalonym $p = (p_1, \dots, p_n)$ wtedy $f'(p) \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ tuż $f'(p)$ w bazach kanonicznych da się wyreprezentować macierzą m -kolumn m -wierszy. Czym są wyrazy tej macierzy? Odwzorowanie liniowe w bazie...

$$[f'(p)]^i_j = [f'(p)e_j]^i$$

$\nabla_{e_j} f(p)$ kawałek stabej pochodnej, czyli pochodne kierunkowe

$$e_j = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \leftarrow j \quad \nabla_{e_j} f = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(p + te_j) - f(p)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} \begin{bmatrix} f'(p + te_j) - f'(p) \\ \vdots \\ f^m(p + te_j) - f^m(p) \end{bmatrix}$$

← bierzemy i-ty współrzędną

$$(\nabla_{e_j} f(p))^i = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} (f^i(p_1, \dots, p_j + t, \dots, p_n) - f^i(p_1, \dots, p_n)) = \frac{\partial}{\partial x_j} f^i(p)$$

Inne oznaczenia:

$$\frac{\partial f^i}{\partial x_j}(p), \partial_j f^i(p), f_{,j}^i(p) \dots$$

Okazuje się więc, że jeśli $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ jest różniczkowalna a $p \in \mathbb{R}^n$ to pochodna jest odwzorowaniem liniowym które w bazach kanonicznych zapisuje się jako

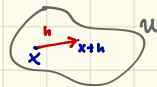
$$f: \mathbb{R}^n = (x^1, \dots, x^n) \mapsto (f^1(x), f^2(x), \dots, f^m(x)) \in \mathbb{R}^m$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \frac{\partial f^1}{\partial x^1} & \frac{\partial f^1}{\partial x^2} & \dots & \frac{\partial f^1}{\partial x^n} \\ \frac{\partial f^2}{\partial x^1} & \frac{\partial f^2}{\partial x^2} & \dots & \frac{\partial f^2}{\partial x^n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f^m}{\partial x^1} & \frac{\partial f^m}{\partial x^2} & \dots & \frac{\partial f^m}{\partial x^n} \end{bmatrix}}_m \left. \vphantom{\begin{bmatrix} \frac{\partial f^1}{\partial x^1} & \frac{\partial f^1}{\partial x^2} & \dots & \frac{\partial f^1}{\partial x^n} \\ \frac{\partial f^2}{\partial x^1} & \frac{\partial f^2}{\partial x^2} & \dots & \frac{\partial f^2}{\partial x^n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f^m}{\partial x^1} & \frac{\partial f^m}{\partial x^2} & \dots & \frac{\partial f^m}{\partial x^n} \end{bmatrix}} \right\}^m$$

Na tę macierz mówi się macierz pochodnych
albo **macierz Jacobiego**

Sprawdzanie różniczkowalności odwzorowania jest cały czas pewnym problemem i wymaga badania reszty. Do celów praktycznych chcielibyśmy umieć wyponia-
dać się o różniczkowalności (przynajmniej w przypadku $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$) na podsta-
wie własności pochodnych zgłaszanych wyrażających jako wyrazy maciernowe.
Zanim sformułujemy odpowiednie warunki potrzebujemy pewnego twierdzenia.

Twierdzenie: X, Y p. Banacha, $f: X \rightarrow Y$ stało różniczkowalna na U (tzn stała pochodna istnieje w każdym punkcie u)



$$t \in [0, 1], x \in U, h \in X \quad x+th \in U$$

$$\|f(x+h) - f(x)\| \leq \|h\| \sup_{t \in [0, 1]} \|\nabla f(x+th)\|$$

Dowód: Dowód twierdzenia opiera się na istnieniu wystarczająco bogatej przestrzeni funkcji liniowych ciągłych, czyli przestrzeni $B(X, \mathbb{R})$. Istnieje twierdzenie, które mówi, że Na przestrzeni ułnormowanej dla każdego wektora $x \neq 0$ istnieje $\varphi \in B(X, \mathbb{R})$ taki, że $\|\varphi\| = 1$ i $\varphi(x) = \|x\|$. Jest to wniosek z l. Hahn'a - Banacha.

Wzimy teraz $\varphi \in B(Y, \mathbb{R})$ z φ i f stowarzyszyć możemy rzeczywistą funkcję $\varphi_f: [0, 1] \ni t \mapsto \langle \varphi, f(x+th) \rangle$

↑ studenci się opóźnili algebricznie więc trzeba wyjaśnić tę notację.

$$\begin{aligned} \varphi_f'(t) &= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{s} (\varphi_f(t+s) - \varphi_f(t)) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{s} (\langle \varphi, f(x+th+sh) \rangle - \langle \varphi, f(x+th) \rangle) = \\ &= \lim_{s \rightarrow 0} \langle \varphi, \frac{1}{s} (f(x+th+sh) - f(x+th)) \rangle \underset{\text{ciągłość } \varphi}{=} \langle \varphi, \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{s} (f(x+th+sh) - f(x+th)) \rangle = \\ &= \langle \varphi, \nabla_h f(x+th) \rangle \end{aligned}$$

φ_f jest więc różniczkowalna na $[0, 1]$ (jest więc też ciągła na $[0, 1]$).

φ_f jest też ciągła na $[0, 1]$. Fakt, że $\lim_{s \rightarrow 0} \varphi_f(s) = \varphi_f(0) = \langle \varphi, f(x) \rangle$ i $\lim_{s \rightarrow 1} \varphi_f(s) = \varphi_f(1)$ wynika z istnieniem $\nabla_h f$ na U . Co prawda stała różniczkowalność nie pociąga ciągłości, ale pociąga ciągłość wzdłuż prostych, tzn $\lim_{s \rightarrow 0} f(p+sh) = f(p)$ dla $p \in U$.

φ_f spełnia założenie w leżymy więc $\xi \in]0,1[$

$$\varphi_f(1) - \varphi_f(0) = \varphi_f'(\xi)$$

$$\langle \varphi, f(x+h) \rangle - \langle \varphi, f(x) \rangle = \langle \varphi, \nabla_n f(x+\xi h) \rangle$$

$$\langle \varphi, f(x+h) - f(x) \rangle$$

UWAGA: Niech $x \in X$, $\varphi \in B(X, \mathbb{R})$ φ jest funkcją na X , ale można też spojrzeć z drugiej strony: x jest funkcją na $B(X, \mathbb{R})$ $\varphi \mapsto \langle \varphi, x \rangle$. W tym sensie $X \subset B(B(X, \mathbb{R}), \mathbb{R})$. Można więc patrzeć na $\|x\|$ jak na normę operatorową funkcjonalu na $B(X, \mathbb{R})$. W tym sensie napiszemy:

$$\|f(x+h) - f(x)\| = \sup_{\|\varphi\|=1} |\langle \varphi, f(x+h) - f(x) \rangle| = \sup_{\substack{\|\varphi\|=1 \\ \xi \in]0,1[}} |\langle \varphi, \nabla_n f(x+\xi h) \rangle| \leq$$

$$\leq \sup_{\|\varphi\|=1} \|\varphi\| \|\nabla_n f(x+\xi h)\| = \|\nabla_n f(x+\xi h)\| \leq \sup_{t \in [0,1]} \|\nabla_n f(x+th)\| \leq$$

$$\leq \|h\| \sup_{t \in [0,1]} \|\nabla f(x+th)\|$$



Oczywiście jeśli f jest różniczkowalna to $\nabla_n f(x) = f'(x)h$ i oszacowanie występujące w twierdzeniu przyjmuje postać

$$\|f(x+h) - f(x)\| \leq \|h\| \sup_{t \in [0,1]} \|f'(x+th)\|$$

wniosek, który się zaraz przyda: Biorąc odwzorowanie $x \mapsto f(x) - Ax$ dla $A \in B(X, Y)$ mamy oszacowanie

$$\|f(x+h) - f(x) - Ah\| \leq \|h\| \sup_{t \in [0,1]} \|f'(x+th) - A\|$$

Twierdzenie: X, Y - p. Banacha, $u \subset X$ $f: u \rightarrow Y$ jest słabo różniczkowalne na u .

Jeśli $u \ni x \mapsto \nabla f(x) \in B(X, Y)$ jest ciągłe to f jest klasy C^1 , tzn $f'(x)$ istnieje i zależy od x u sposobem ciągłym. Oczywiście $f'(x) = \nabla f(x)$.

dotychczas: f jest słabo różniczkowalne więc $\nabla f(x)$ istnieje i jest elementem $B(x, r)$

Rozważmy dla ustalonego $x_0 \in U$ odwzorowanie $U \ni x \mapsto f(x) - \nabla_x f(x_0)$

Odwzorowanie to jest słabo różniczkowalne $\nabla g(x) = \nabla f(x) - \nabla f(x_0)$

na podstawie wniosku, który się miał przydać, w x_0 mamy

$$\underbrace{\|f(x_0+h) - f(x_0) - \nabla_h f(x_0)\|}_{R(x_0, h)} \leq \|h\| \sup_{t \in [0, 1]} \|\nabla f(x_0+th) - \nabla f(x_0)\|$$

$$\frac{\|R(x_0, h)\|}{\|h\|} \leq \sup_{t \in [0, 1]} \|\nabla f(x_0+th) - \nabla f(x_0)\| \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0$$

w wyniku z ciągłości $\nabla f(x)$ względem x

Dla odwzorowań $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ słabo pochodne to macierz, której wyrazami są pochodne cząstkowe $\frac{\partial f^i}{\partial x^j}$. Powyższe twierdzenie pozwala sformułować wniosek:

Jeśli pochodne cząstkowe $\frac{\partial f^i}{\partial x^j}$ istnieją i są ciągłe to odwzorowanie $(x^1, \dots, x^n) \mapsto (f^1(x), \dots, f^m(x))$ jest różniczkowalne w sposób ciągły.

CZĘŚCIOWO ALGEBRAICZNA WSTAWKA O ODWZOROWANIACH WIELOLINIOWYCH.

Niech V_1, V_2 będą przestrzeniami wektorowymi. Rozważamy odwzorowanie $Q: V_1 \times V_2 \rightarrow W$ o własnościach

$$\forall v_2 \in V_2 \quad Q(v_2, \cdot): V_1 \rightarrow W \text{ jest liniowe} \\ \forall v_1 \in V_1 \quad Q(\cdot, v_2): V_2 \rightarrow W \text{ jest liniowe}$$

$L(V_1, V_2; W)$

Takie odwzorowanie nazywamy **dwuliniowe** (biliniowe). Odwzorowania dwuliniowe, podobnie jak liniowe, wyznaczone są jednoznacznie przez swoje wartości na bazie. W przypadku skończonego wymiaru pozwala to wygodnie wyreprezentować odwzorowanie dwuliniowe w postaci macierzy wyrażań z W .

W dalszym ciągu zajniemy się jedynie przypadkiem $V_1 = V_2 (=V)$
 Założmy na chwile, że $\dim V = n$. Wybierzmy bazę

27

$$e = (e_1, \dots, e_n) \quad v = v^1 e_1 + \dots + v^n e_n \quad [v]^e = \begin{bmatrix} v^1 \\ \vdots \\ v^n \end{bmatrix}$$

$$u = u^1 e_1 + \dots + u^n e_n$$

$$[u]^e = \begin{bmatrix} u^1 \\ \vdots \\ u^n \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} Q(v, u) &= Q(v^1 e_1 + \dots + v^n e_n, u^1 e_1 + \dots + u^n e_n) = \\ &= \sum_{i=1}^n v^i Q(e_i, u) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n v^i u^j \underbrace{Q(e_i, e_j)}_{Q_{ij}} \end{aligned}$$

Q_{ij} ← elementy macierzy macierzy Q

Wygodnie jest pisać tak:

$$\begin{aligned} [v^1 \ v^2 \ \dots \ v^n] & \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & \dots & Q_{1n} \\ Q_{21} & Q_{22} & \dots & Q_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ Q_{n1} & Q_{n2} & \dots & Q_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u^1 \\ u^2 \\ \vdots \\ u^n \end{bmatrix} \\ \parallel & \\ ([v]^e)^T & \end{aligned}$$

mnożymy jak zwykłe macierze.

$$\parallel \\ [Q]_e \quad [u]^e$$

Wśród wszystkich odwzorowań dwuliniowych istotne są dwuliniowe symetryczne
 to znaczy takie, które spełniają warunek

$$\forall v, u \in V \quad Q(v, u) = Q(u, v)$$

W przypadku skończeniowymiarowym, w reprezentacji macierzowej, odwzorowaniu dwuliniowemu symetrycznemu odpowiada macierz symetryczna

Niech teraz Φ będzie odwzorowaniem liniowym z V do przestrzeni $L(V, W)$

$$\Phi: V \longrightarrow L(V, W)$$

$$\Phi \in L(V, L(V, W))$$

28

Odwzorowaniu temu odpowiada pewne odwzorowanie $Q_\Phi: V \times V \longrightarrow W$

$Q_\Phi(v, u) = (\Phi v)u$. Odwzorowanie to jest w sposób oczywisty dwuliniowe. Przymiarkowanie $\Phi \mapsto Q_\Phi$ jest odwracalne. Mając $Q \in L(V, V; W)$ tworzymy Φ_Q tak, że $\Phi_Q(v) = Q(v, \cdot)$. Istnieje zatem bijekcja między $L(V, V; W)$ i $L(V, L(V, W))$.

Rozważanie to można uogólnić na przypadek odwzorowań n -liniowych:

$Q: \underbrace{V \times \dots \times V}_n \longrightarrow W$ nazywamy **n -liniowe** jeśli jest liniowe ze względu na każdy argument.

Istnieje bijekcja między $L(\underbrace{V, \dots, V}_n; W)$ a $L(V, \underbrace{L(V, \dots, L(V, W))}_n)$ dana zależnością

$$Q(v_1, \dots, v_n) = ((\Phi_Q v_1)v_2) \dots v_n$$

W następnej kolejności przestrzenie V i W wyposażymy w normy i rozważać będziemy odwzorowanie wieloliniowe ciągłe.

