WYKŁAD 5

WYŻSZE POCHODNE, SYMETRIA DRUGICH (WYŻSZYCH) POCHODNYCH

11.03.2016

CEL: DEFINICJA WYŻSZYCH POCHODNYCH

W trakcie poprzednich wykładów zdefiniowaliśmy pojęcie różniczkowalności oraz pochodnę odwzorowań między przestrzeniami Banacha. Okazało się, że pochodna jest obiektem innego rodzaju niż wyjściowe odwzorowanie:

$$f: X \supset \mathcal{U} \longrightarrow Y \qquad f': X \supset \mathcal{U} \longrightarrow B(X,Y)$$

Zanim więc zdefiniujemy pochodnę drugą, trzecią i wyższe musimy przyjrzeć się sytuacji.

Jeśli f jest różniczkowalne w każdym punkcie zbioru $\mathcal{U} \subset X$ to f' jest odwzorowaniem określonym na $\mathcal{U}$ o wartościach w $B(X,Y)$. Przestrzeń $B(X,Y)$ jest unormowana i jeśli Y jest przestrzenią Banacha to $B(X,Y)$ też jest p. Banacha. Mamy już wystarczająco dużo narzędzi żeby zdefiniować pochodną odwzorowania $f': \mathcal{U} \longrightarrow B(X,Y)$. W ustalonym punkcie $x_0 \in \mathcal{U}$ $(f')'(x_0)$ jest elementem $B(X, B(X,Y))$. Wiemy już, że $L(X, L(X,Y)) \simeq L(X,X;Y)$. Czy mamy też izomorfizm dla odwzorowań ograniczonych? Co to jest $B(X,X;Y)$? Normę odwzorowania dwu (wielo) liniowego? Ciągłość odwzorowań dwu (wielo) liniowych? Na szczęście sytuacja jest względnie prosta.

FAKT: Niech $F: \underbrace{V \times \cdots \times V}_{k} \longrightarrow W$ będzie odwzorowaniem k-liniowym. Równoważne są warunki

(1) F jest ciągłe (2) F jest ciągłe w 0 (3) F jest ograniczone, tzn

$$\sup_{\|v_i\| \le 1} \|F(v_1, \dots, v_k)\| < \infty$$

$$\begin{tikzcd} & 1 \arrow[d, Rightarrow, "\text{oczywiste}"] \\ 3 \arrow[ur, Rightarrow] & 2 \arrow[l, Rightarrow] \end{tikzcd}$$

W $\underbrace{V \times \cdots \times V}_{k}$ używamy normy $\|(v_1, \dots, v_k)\| = \max_i \|v_i\|$. F jest ciągłe w 0, tzn

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta: \ \max_i \|v_i\| < \delta \Rightarrow \|F(v_1, \dots, v_k)\| < \varepsilon.$$

Weźmy teraz $(x_1, \dots, x_k)$ takie, że $\forall i \ \|x_i\| \leqslant 1$. Wtedy $\|\delta x_i\| \leqslant \delta$ i

$$\|F(\delta x_i, \dots, \delta x_k)\| < \varepsilon \qquad \sup_{\|x_i\| \leqslant 1} \|F(\delta x_i, \dots, \delta x_k) \leqslant \varepsilon \qquad \delta^k \sup_{\|x_i\| \leqslant 1} \|F(x_1, \dots x_k)\| \leqslant \varepsilon$$

$$\sup \|F(x_1, \dots, x_k)\| \leqslant \frac{\varepsilon}{\delta^k} < \infty$$

$$F(v_1 + h_1, \dots, v_k + h_k) - F(v_1, \dots, v_k) = F(v_1, v_2 + h_2, \dots, v_k + h_k) + F(h_1, v_2 + h_2, \dots) - F(v_1, \dots, v_k) =$$

$$\underline{F(v_1, v_2, v_3 + h_3, \dots, v_k + h_k)} + \underline{F(v_1, h_2, v_3 + h_3, \dots)} + \underline{F(h_1, v_2 + h_2 \dots)} - \underline{F(v_1, \dots, v_k)} = \dots =$$

$$= \sum_{m=1}^{k} F(v_1, \dots, v_{m-1}, h_m, v_{m+1} + h_{m+1}, \dots)$$

$$\|F(v_1 + h_1, \dots, v_k + h_k) - F(v_1, \dots, v_k)\| = \left\| \sum F(v_1, \dots, v_{m-1}, h_m, v_{m+1} + h_{m+1}, \dots, v_k + h_k) \right\| \leqslant$$

$$\leqslant \sum \| \dots \| \leqslant \sum_{m=1}^{k} M \|v_1\| \dots \|v_{m-1}\| \|h_m\| \|v_{m+1} + h_{m+1}\| \dots \|v_k + h_k\| \quad (*)$$

ograniczenie na F

Weźmy teraz $(h_1 \dots h_k)$: $\forall i \ \|h_i\| < \delta$ wtedy $\|v_i + h_i\| \leqslant \|v_i\| + \delta \leqslant 2\|v_i\|$

δ: $\delta < \max_i \|v_i\|$

$$(*) \leqslant \delta \sum_{m=1}^{k} \|v_1\| \dots \|v_{m-1}\| \, 2\|v_{m+1}\| \dots 2\|v_k\| \leqslant \underbrace{\delta \cdot 2^k \left(\max_i \|v_i\|\right)^k}_{\varepsilon}$$

$$\varepsilon > \delta \cdot 2^k \|(v_1, \dots, v_k)\|^k$$

Dla ustalonego ε trzeba wziąć $\delta < \varepsilon / 2^k \|(v_1, \dots v_k)\|^k$. Wtedy jeśli $\|(h_1, \dots h_k)\| < \delta$ to $\|F(v_1 + h_1, \dots, v_k + h_k) - F(v_1, \dots, v_k)\| < \varepsilon$, zatem F jest ciągłe w $(v_1, \dots, v_k)$. ■

Liczbę $\|F\| = \sup_{\|x_i\|\leq 1} \|F(x_1,\dots,x_k)\|$ nazywamy normę odwzorowania F.

łatwo sprawdza się że ta nazwa ma sens, tzn funkcja $F \longmapsto \|F\|$ jest normą.
Odwzorowania ograniczone ze zbioru $L(V_1\dots,V;W)$ oznaczomy $B(V_1\dots,V;W)$
$B(V_1\dots,V;W)$ jest przestrzenią unormowaną, Banacha jeśli W jest Banacha.

Wiemy już, że istnieje izomorfizm między $L(V,L(V,\dots L(V,W))$ a $L(V_1,\dots,V;W)$
Każda z tych podprzestrzeni zawiera odpowiedni podzbiór (podprzestrzeń liniową) odwzorowań ograniczonych: $B(V,B(V,\dots B(V,W)\dots)$ i $B(V_1,\dots,V;W)$
Okazuje się, że zachodzi

FAKT: Niech $F \in B(V,B(V,\dots,B(V,W)\dots)$. Oznaczamy $Q_F \in L(V,\dots,V;W)$ odwzorowanie $Q_F(\vartheta_1,\dots,\vartheta_k) = ((F\vartheta_1)\vartheta_2\dots)\vartheta_k)$
$Q_F \in B(V\dots,V;W)$, przyporządkowanie $F \longmapsto Q_F$ jest izometrycznym izomorfizmem.

DOWÓD

Weźmy najpierw $k=2$ $\quad F \in B(V,B(V,W))$ tzn $\|F\| = \sup_{\|\vartheta_1\|\leq 1} \|\underbrace{F\vartheta_1}_{\in B(V,W)}\|$

tzn $\|F\vartheta_1\| = \sup_{\|\vartheta_2\|\leq 1} \|(F\vartheta_1)\vartheta_2\|$ tzn $\|F\| = \sup_{\|\vartheta_1\|=1} \sup_{\|\vartheta_2\|=1} \|(F\vartheta_1)\vartheta_2\| =$

$$= \sup_{\substack{\|\vartheta_1\|=1 \\ \|\vartheta_2\|=1}} \|Q_F(\vartheta_1,\vartheta_2)\| = \|Q_F\|$$

Dla dowolnego k dowód przebiega identycznie, tylko napisy są dłuższe.

$F \longrightarrow Q_F$ jest izometrią. Jest też izomorfizmem liniowym – łatwo możemy wskazać odwzorowanie odwrotne

$$\underset{B(V_1,\dots,V;W)}{\overset{}{Q}} \longmapsto F_Q \in B(V,B(V,\dots B(V,W))$$

Dla $k=2$ mamy

$$F_Q(\vartheta) = Q(\vartheta,\cdot) \quad \blacksquare$$

Definicję drugiej i wyższych pochodnych możemy teraz sformułować następująco:

DEFINICJA Niech $f: X \ni \mathcal{U} \longrightarrow Y$ będzie różniczkowalne w każdym punkcie $\mathcal{U}$. Mówimy, że f jest różniczkowalne dwa razy w punkcie $x_0 \in \mathcal{U}$ jeśli istnieje pochodna odwzorowanie $f': \mathcal{U} \longrightarrow B(X,Y)$ w punkcie x_0. Drugą pochodną oznaczamy $f''(x_0)$. Jest ona elementem $B(X, B(X,Y)) \simeq B(X,X;Y)$

Pochodną rzędu k definiujemy indukcyjnie, jako pochodną odwzorowanie $f^{(k)}: \mathcal{U} \longrightarrow \underbrace{B(X, B(X, \dots B(X}_{k-1},Y)\dots)$, będącą elementem $\underbrace{B(X, B(X, \dots B(X}_{k},Y)\dots)$

$\simeq B(\underbrace{X, \dots X}_{k}; Y)$.

Wśród odwzorowań dwuliniowych wyróżniamy dwuliniowe symetryczne, tzn $Q(v,w) = Q(w,v)$. Okazuje się, że druga pochodna jest właśnie taka, tzn mamy twierdzenie

TWIERDZENIE: Jeśli $f: \mathcal{U} \to Y$ jest różniczkowalne dwukrotnie w punkcie $x_0 \in \mathcal{U}$ to $f'(x_0)$ jest odwzorowaniem dwuliniowym symetrycznym.

DOWÓD: Pokazać musimy, że $f''(x_0)(k,h) = f''(x_0)(h,k)$ lub, co na jedno wychodzi, że

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \| f''(x_0)(h,k) - f''(x_0)(k,h) \| < \varepsilon$$

Pomocna będzie funkcja

$$\varphi: [0,1] \ni t \longmapsto f(x_0 + th + k) - f(x_0 + th)$$

$\varphi(0) = f(x_0+k) - f(x_0)$

$\varphi(1) = f(x_0+h+k) - f(x_0+h)$

$$\underbrace{\varphi(1) - \varphi(0)}_{} = f(x_0+h+k) - f(x_0+h) - f(x_0+k) + f(x_0)$$

Wyrażenie symetryczne względem zamiany h i k

jeśli więc zdefiniujemy $\tilde{\varphi}(t) = f(x_0 + h + tk) - f(x_0 + tk)$ będziemy mieć $\tilde{\varphi}(1) - \tilde{\varphi}(0) = \varphi(1) - \varphi(0)$.

$$\| f''(x_0)(h,k) - f''(x_0)(k,h) \| = \| f''(x_0)(h,k) - \varphi(1) + \varphi(0) + \tilde{\varphi}(1) - \tilde{\varphi}(0) - f''(x_0)(k,h) \| \leqslant$$

33

$$\leqslant \| \varphi(1) - \varphi(0) - f''(x_0)(h,k) \| + \| \tilde{\varphi}(1) - \tilde{\varphi}(0) - f''(x_0)(k,h) \|$$

różnią się o zamianę k i h, można więc szacować jedno z nich

Szacujemy $\| \varphi(1) - \varphi(0) - f''(x_0)(h,k) \| = \| \varphi(1) - \varphi(0) - \varphi'(t) + \varphi'(t) - f''(x_0)(h,k) \| \leqslant$

$$\boxed{\| \varphi(1) - \varphi(0) - \varphi'(t) \|} + \| \varphi'(t) - f''(x_0)(h,k) \|$$

na następnej stronie

$$\varphi'(t) = f'(x_0 + th + k)h - f'(x_0 + th)h - f'(x_0)h + f'(x_0)h =$$

$$[f'(x_0 + th + k) - f'(x_0)]h - [f'(x_0 + th) - f'(x_0)]h$$

$$\| [f'(x_0 + th + k) - f'(x_0)]h - [f'(x_0 + th) - f'(x_0)]h - \underbrace{(f''(x_0)k)h}_{f''(x_0)(k+th)h - f''(x_0)(th)h} \| =$$

$$= \| [f'(x_0 + th + k) - f'(x_0) - f''(x_0)(th + k)]h - [f'(x_0 + th) - f'(x_0) - f''(x_0)(th)]h \| \leqslant$$

$$\leqslant (\varepsilon \underbrace{\| th + k \|}_{\leqslant \|th\| + \|k\| \leqslant \|h\| + \|k\|} + \varepsilon \overbrace{\| th \|}^{\leqslant \|h\| \leqslant \|h\| + \|k\|}) \|h\| \leqslant 2\varepsilon \|h\| (\|h\| + \|k\|)$$

$$f'(x_0 + v) = f'(x_0) + (f')'(x_0)v + R(x_0, v)$$

$$f'(x_0 + v) - f'(x_0) - f''(x_0)v = R(x_0, v)$$

$$\boxed{\| f'(x_0 + v) - f'(x_0) - f''(x_0)v \| \leqslant \varepsilon \|v\|}$$

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 : \|v\| < \delta$$

ogólna prawda wynikająca z istnienia drugiej pochodnej

31

$$\|\varphi(1)-\varphi(0)-\varphi'(0)\| \leqslant \sup_{s\in]0,1[} \|\varphi'(s)-\varphi'(0)\| = \sup_{s\in]0,1[} \|\varphi'(s)-f''(x_0)(h,k)+f''(x_0)(h,k)-\varphi'(0)\|$$

twierdzenie o wartości średniej

$$\leqslant \sup_s \|\varphi'(s)-f''(x_0)(h,k)\| + \|\varphi'(0)-f''(x_0)(h,k)\| \leqslant 2\varepsilon\|h\|(\|h\|+\|k\|) + 2\varepsilon\|h\|(\|h\|+\|k\|)$$

takie coś było szacowane właśnie

Ostatecznie

$$\|\varphi(1)-\varphi(0)-f''(x_0)(h,k)\| \leqslant 6\varepsilon\|h\|(\|h\|+\|k\|)$$

Druga część z $\tilde{\varphi}$ i $f''(x_0)(k,h)$ powstaje z już oszacowanej przez zamianę k na h:

$$\|\tilde{\varphi}(1)-\tilde{\varphi}(0)-f''(x_0)(k,h)\| \leqslant 6\varepsilon\|k\|(\|h\|+\|k\|)$$

Różnicę między $f''(x_0)(k,h)$ i $f''(x_0)(h,k)$ mamy oszacowaną zatem następująco:

$$\|f''(x_0)(h,k)-f''(x_0)(k,h)\| \leqslant 6\varepsilon(\|h\|+\|k\|)^2$$

ε występujące w oszacowaniu pochodziło z wypowiedzi $\forall \varepsilon>0\ \exists\delta: \|h\|,\|k\|<\delta$. Oszacowanie działa więc dla małych h i k. Zauważmy jednak, że ze względu na dwuliniowość $f''(x_0)$ i postać prawej strony możemy napisać:

$$\|f''(x_0)(h,k)-f''(x_0)(k,h)\| \leqslant 6\varepsilon(\|h\|+\|k\|)^2 \quad /\cdot\lambda^2$$

$$\|\lambda^2 f''(x_0)(h,k)-\lambda^2\cdots\| \leqslant 6\varepsilon(\lambda\|h\|+\lambda\|k\|)^2$$

$$\|f''(x_0)(\lambda h,\lambda k)-\cdots\| \leqslant 6\varepsilon(\|\lambda h\|+\|\lambda k\|)^2$$

Nierówność zachodzi więc też dla $(\lambda h,\lambda k)$ przy dowolnym λ. ε nadal pozostaje dowolnie małe, więc

$$f''(x_0)(h,k)=f''(x_0)(k,h)$$

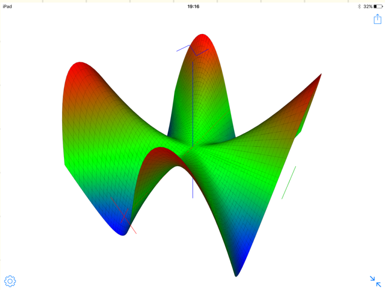
■

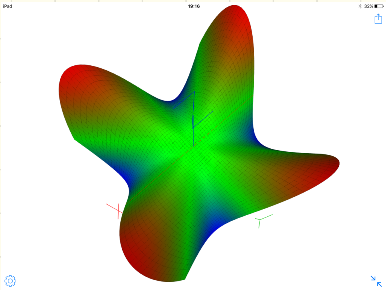
Indukcyjnie można udowodnić, że pochodna k-tego rzędu, jeśli istnieje jest odwzorowaniem liniowym symetrycznym. Dla k-liniowych warunek symetrii oznacza niezmienniczość ze względu na dowolną permutację argumentów. Dokładnie rzecz biorąc **33**

$Q \in L(\underbrace{V, \dots, V}_{k}; W)$ nazywamy symetrycznym jeśli dla dowolnego układu $(v_1, \dots, v_k)$ elementów z V i dowolnej permutacji $\sigma \in S_k$ zachodzi
$$Q(v_1, \dots, v_k) = Q(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(k)})$$

UWAGA: Podobnie jak samo istnienie pochodnych kierunkowych nie gwarantowało różniczkowalności, także samo istnienie drugich pochodnych kierunkowych nie gwarantuje istnienia drugiej pochodnej w sensie mocnym a nawet nie gwarantuje symetrii tych pochodnych. Jako przykład rozważmy kolejny „eksponat" w kolekcji funkcji dziwnych:

$$f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}, \quad f(0,0) = 0 \qquad f(x,y) = xy\,\frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$$





$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,y) = \lim_{t \to 0} \frac{f(t,y) - f(0,y)}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{1}{\cancel{t}}\left(\cancel{t}y\,\frac{t^2 - y^2}{t^2 + y^2}\right) = -y \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0) = -1$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,0) = \lim_{t \to 0} \frac{f(x,t) - f(x,0)}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{1}{\cancel{t}}\left(x\cancel{t}\,\frac{x^2 - t^2}{x^2 + t^2}\right) = x \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) = 1$$

Problem z funkcją f wynika z tego że mieszane pochodne nie są ciągłe w $(0,0)$. Obowiązuje bowiem twierdzenie:

34

TWIERDZENIE $f: X \supset U \longrightarrow Y$ Jeśli w otoczeniu x_0 istnieją $\nabla_h \nabla_k f$ i $\nabla_k \nabla_h f$ oraz są ciągłe w x_0 to są równe w x_0.

Twierdzenie tego dowodzić nie będziemy, gdyż szacowanie niedługo wyjdzie nam uszami! Dowód jest w zielonym skrypcie. Na koniec warto zanotować kryterium „bycia klasy C^k" dla odwzorowań $\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$

TWIERDZENIE: Odwzorowanie $f: \mathbb{R}^n \supset U \longrightarrow \mathbb{R}^m$ jest klasy C^k na U wtedy i tylko wtedy, gdy istnieją i są ciągłe wszystkie pochodne cząstkowe rzędu k

$$\frac{\partial^k f^i}{\partial x_{j_1} \partial x_{j_2} \cdots \partial x_{j_k}} \qquad j_l \in \{1, \dots, n\}$$