WYKŁAD 6

CEL: BADANIE EKSTREMÓW FUNKCJI WIELU ZMIENNYCH

Rachunek różniczkowy w pierwszym semestrze służył nam między innymi do badania przebiegu zmienności funkcji i szkicowania wykresów. Istotnym elementem badania funkcji było poszukiwanie punktów krytycznych i rozpoznawanie ich typu. Poszukiwanie ekstremów było też ważne samo w sobie nawet jeśli nie bardzo obchodzi nas jak zachowuje się funkcja jako taka. Zajmiemy się teraz przygotowaniem gruntu do poszukiwania ekstremów funkcji wielu zmiennych i badania ich rodzaju. Oznacza to, że zajmować się będziemy funkcjami typu

$f: X \supset \mathcal{U} \longrightarrow \mathbb{R}$ gdzie X jest przestrzenią Banacha, w zastosowaniach najczęściej $\mathbb{R}^n$, a wartości są rzeczywiste. Definicja ekstremum (maksimum i minimum) pozostaje bez zmian, tzn: punkt $x_0 \in \mathcal{U}$ jest maksimum (minimum) funkcji f jeśli dla pewnego $\varepsilon > 0$ spełniony jest warunek

$$\forall x \in K(x_0, \varepsilon) \quad f(x) \leqslant f(x_0) \qquad \left(\forall x \in K(x_0, \varepsilon) \quad f(x) \geqslant f(x_0) \right)$$

Interesowały nas będą kryteria konieczne i wystarczające istnienia ekstremum. Żeby zobaczyć, że istnieją sytuacje skomplikowane obejrzyjmy kolejny eksponat z kolekcji funkcji dziwnych:

$$f(x,y) = (x - y^2)(x - 4y^2) \qquad f(0,0) = 0$$

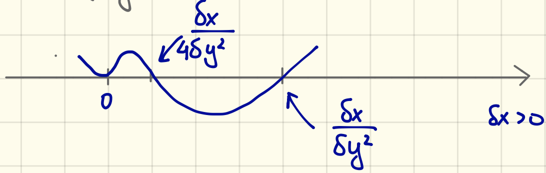
Niech $h = \begin{bmatrix} \delta x \\ \delta y \end{bmatrix}$ $\quad f(th) = (t\delta x - t^2 \delta y^2)(t\delta x - 4t^2\delta y^2) =$

$$= t^2 (\delta x - t\delta y^2)(\delta x - 4t\delta y^2)$$

$$f(th) = t^2\left(\delta x - t\delta y^2\right)\left(\delta x - 4t\delta y^2\right) =$$

Przy ustalonym δx i δy (czyli ustalonym kierunku h) mamy zależność wielomianową od t $(\delta y \neq 0)$

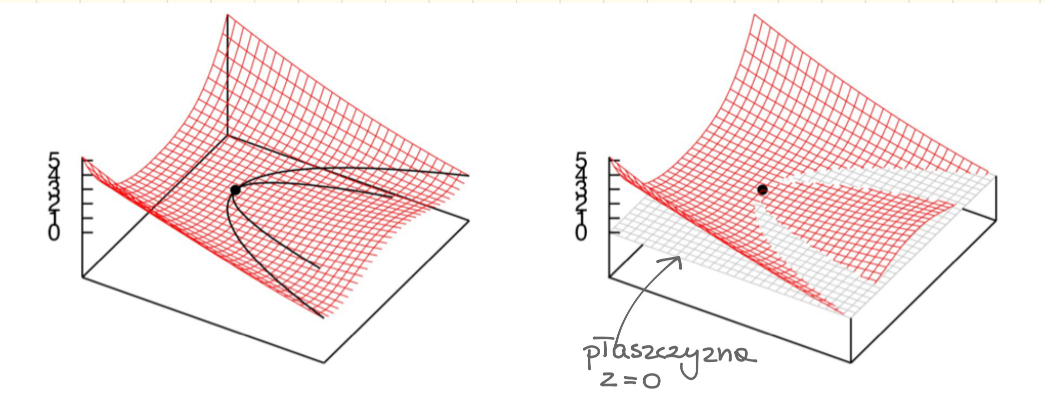
$$= t^2\left(\frac{\delta x}{\delta y^2} - t\right)\left(\frac{\delta x}{4\delta y^2} - t\right)$$



Gdy $\delta x = 0$ mamy $f(th) = 4t^4\delta y^4$ i w $t=0$ jest minimum

Gdy $\delta y = 0$ mamy $f(th) = t^2\delta x^2$ i także w $t=0$ mamy minimum

Wygląda więc na to, że f obcięta do każdej prostej przechodzącej przez zero ma minimum. Nie jest jednak prawdą że f ma minimum w $(0,0)$ gdyż w każdym otoczeniu punktu $(0,0)$ są punkty w których f przyjmuje wartości ujemne:



f ma wartość zero na krzywych $x = y^2$ i $x = 4y^2$, wartości ujemne między nimi i wartości dodatnie w pozostałych punktach.

Powyższy przykład pokazuje, że nie są wystarczające metody jednowymiarowe – badanie funkcji obciętych do prostych może dawać fałszywe wyniki.

Podobnie jednak jak w przypadku jednowymiarowym przydatne będzie rozwinięcie typu wzoru Taylora. Szczególnie często korzystać będziemy z rozwinięcia do rzędu 2.

TWIERDZENIE (WZÓR TAYLORA)

$f: X \supset \mathcal{U} \longrightarrow Y$ różniczkowalna $k-1$ razy na $\mathcal{U}$, pochodna $f^{(k)}$ istnieje w $x_0 \in \mathcal{U}$. Wyrażenie

$$f(x_0+h) - f'(x_0)h - \frac{1}{2!} f''(x_0)(h,h) - \dots - \frac{1}{k!} f^{(k)}(x_0)(h,\dots,h) =: r_k(x_0,h)$$

jest resztą rzędu k, tzn $\frac{r_k(x_0,h)}{\|h\|^k} \xrightarrow[h\to 0]{} 0$

DOWÓD: Indukcja względem k. Dla $k=1$ warunek

$f(x_0+h) - f(x_0) - f(x_0)'h$ jest resztą rzędu 1 jest warunkiem różniczkowalności f w x_0, który jest spełniony na mocy założenia

Zakładamy, że tw. zachodzi dla $m-1$, dowodzimy, że zachodzi dla $m \leq k$. Dla ustalonego $x_0 \in \mathcal{U}$ definiujemy $\varphi: X \supset \vartheta \longrightarrow Y$ gdzie ϑ jest otoczeniem $\overline{0} \in X$

$$\varphi(h) = f(x_0+h) - f(x_0) - f'(x_0)h - \dots - \frac{1}{m!} f^{(m)}(x_0)(h,\dots,h)$$

φ różniczkujemy względem h. Można to zrobić, gdyż f jest różniczkowalne z założenia a pochodne są wieloliniowe ze względu na h więc także różniczkowalne.

Jeśli $Q: \underbrace{X \times \cdots \times X}_{l} \to Y$ jest odwzorowaniem l-liniowym ciągłym to

Q jest różniczkowalne w każdym punkcie 38

$$Q(h_1+\delta h_1, \dots, h_l+\delta h_l) = Q(h_1, \dots, h_l) + Q(\delta h_1, h_2, \dots, h_l) + Q(h_1, \delta h_2, \dots h_l) +$$
$$+ \dots + Q(h_1, \dots, h_{l-1}, \delta h_l) + r(h, \delta h)$$

wyrazy zawierające przynajmniej 2 razy δh

Pochodna Q' jest odwzorowaniem

$$\underbrace{X \times \cdots \times X}_{l} \ni (\delta h_1, \dots, \delta h_l) \longmapsto \sum_{i=1}^{l} Q(h_1, \dots \delta h_i \dots h_l) \in W$$

Jeśli Q jest symetryczne to przyjmuje postać $\sum_{i=1}^{l} Q(\delta h_i, h_2 \overset{i}{\dots}, h_l)$

Jeśli ponadto $h_1 = h_2 = \dots = h_l = h$, $\delta h_1 = \dots = \delta h_l = \delta h$

$$= l \cdot Q(\delta h, h \dots h)$$

$$\varphi(h) = f(x_0+h) - f(x_0) - f'(x_0)h - \dots - \frac{1}{m!} f^{(m)}(x_0)(h, \dots, h)$$

$$\varphi'(h) = f'(x_0+h) - f'(x_0) - f''(x_0)(\cdot, h) - \dots - \frac{1}{(m-1)!} f^{(m)}(x_0)(\cdot, h, \dots, h)$$

$B(X,Y) \quad \varphi' : X \supset O \longrightarrow B(X,Y)$ także jest różniczkowalne i

$$\varphi''(h) = f''(x_0+h) - f''(x_0)(\cdot, \cdot) - \dots - \frac{1}{(m-2)!} f^{(m)}(x_0)(\cdot, \cdot, \underbrace{h, \dots, h}_{m-2})$$

Ponieważ f jest m-razy różniczkowalne w x_0 to φ' jest $m-1$ razy różniczkowalne w $h=0$. Korzystając z założenia indukcyjnego piszemy

$$\frac{1}{\|h\|^{m-1}} \| \varphi'(h) - \overset{=0}{\varphi'(0)} - (\varphi')'(0)h - \dots - \frac{1}{(m-1)!} \overset{=0}{(\varphi')^{(m-1)}}(0)(h, \dots, h) \| \xrightarrow{h \to 0} 0$$

$$\frac{\|\varphi'(h)\|}{\|h\|^{m-1}} \xrightarrow[h\to 0]{} 0$$

$$\frac{\|f(h)\|}{\|h\|^{p}} = \frac{\|f(h)-f(0)\|}{\|h\|^{p}} \leqslant \frac{1}{\|h\|^{\cancel{p}\,p-1}} \cancel{\|h\|} \sup_{t\in]0,1[} \|f'(th)\| = \sup_{t\in]0,1[} \frac{\|f'(th)\|}{\|h\|^{p-1}}$$

$$\leqslant \frac{1}{t^{p-1}} \sup \frac{\|f'(th)\|}{\|h\|^{p-1}} \leqslant \sup_{t\in]0,1[} \frac{\|f'(th)\|}{\|th\|^{p-1}} \longrightarrow 0 \quad \blacksquare$$

$t\in]0,1[$

Dla jednej zmiennej mieliśmy różne wzory na resztę, w szczególności przy założeniu istnienia kolejnej pochodnej

$$R_n(x_0,h) = \frac{1}{(n+1)!} h^{n+1} f^{(n+1)}(\xi) \quad \xi \in]x_0, x_0+h[$$

Dla wielu zmiennych mamy zamiast tego oszacowanie

TWIERDZENIE (Nierówność Taylora)

$f: X \supset \mathcal{U} \longrightarrow Y$ różniczkowalne k krotnie oraz na zbiorze

$\{x\in X : x = x_0 + th,\ t\in]0,1[\}$ istnieje pochodna rzędu $k+1$

wtedy reszta ze wzoru Taylora spełnia nierówność

$$\|r_k(x_0,h)\| \leqslant \frac{1}{(k+1)!} \|h\|^{k+1} \sup_{t\in]0,1[} \|f^{(p+1)}(x_0+th)\|$$

Mając do dyspozycji wzór Taylora możemy zastanowić się nad warunkami istnienia ekstremum.

(1) Warunek konieczny Niech x_0 będzie ekstremum funkcji $f: X\supset\mathcal{U} \to \mathbb{R}$

W takim przypadku dla dowolnego (niezbyt dużego) h funkcja

$$]-\varepsilon,\varepsilon[\ni t \longmapsto f(x_0+th)$$

ma ekstremum w 0 (widzieliśmy już, że twierdzenie odwrotne nie jest prawdziwe). Jeśli zatem istnieją pochodne kierunkowe $\nabla_h f(x_0)$ to muszą one być równe zero. Możemy zatem sformułować następujący fakt

40

FAKT: Jeśli x_0 jest ekstremum f oraz f jest słabo różniczkowalna w x_0 to $\nabla f(x_0) = 0$.

Mamy więc warunek konieczny dla funkcji w jakimś sensie różniczkowalnych. Warunek dostateczny wymaga użycia wzoru Taylora:

TWIERDZENIE: $f: X \supset \mathcal{U} \longrightarrow \mathbb{R}$ jest k-krotnie różniczkowalna w x_0 oraz $f^{(m)}(x_0) = 0$ dla $m < k$, $f^{(k)}(x_0) \neq 0$ (1) Jeśli w x_0 f ma maximum (minimum) to k jest parzyste oraz dla dowolnego h $f^{(k)}(h, \dots, h) \leqslant 0$ $\left(f^{(k)}(x_0)(h, \dots, h) \geqslant 0 \right)$.

(2) Jeśli dla pewnego $\varepsilon > 0$ $f^{(k)}(x_0)(h, \dots, h) < -\varepsilon$ $\left(f^{(k)}(x_0)(h \dots h) > \varepsilon \right)$ dla dowolnego h: $\|h\| = 1$ to f ma w x_0 maksimum (minimum)

DOWÓD

(1) Rozważmy $t \xmapsto{g_h} f(x_0 + th)$ jest to funkcja rzeczywista, jednej zmiennej, różniczkowalna k razy: $g'(t) = f'(x_0 + th)h$ $g_h''(t) = f''(x_0 + th)(h, h)$ itd. Skoro f w x_0 pochodne zerowe do rzędu $k-1$ to $g_h^{(m)}(0) = 0$ dla $m < k$. Skoro $f^{(k)}(x_0) \neq 0$ to dla pewnego h $g_h^{(k)}(0) \neq 0$. g_h ma ekstremum w zerze, zatem zgodnie z odpowiednim twierdzeniem k musi być parzyste i stosownego znaku od rodzaju ekstremum. Ponadto

$$g_h^{(k)}(0) = f^{(k)}(x_0)(h, \dots, h)$$

Wątpliwości może budzić jedynie fakt czy to że $f^k(x_0) \neq 0$ jest

równoznaczne z faktem, że dla pewnego h $f^{(k)}(h, \dots h) \neq 0$.
Okazuje się, że jest to ogólna własność odwzorowań k-liniowych symetrycznych.

41

Jeśli Q jest k-liniowe symetryczne to Q jest jednoznacznie wyznaczone na wektorach postaci $(v, v \dots v)$

Istotnie: Dla dwuliniowych jest bardzo łatwo:

$$Q: V \times V \longrightarrow W \qquad q: V \longrightarrow W \qquad q(v) = Q(v,v)$$

← forma kwadratowa

$$q(v+v') = Q(v+v', v+v') = Q(v, v+v') + Q(v', v+v') =$$

$$\underbrace{Q(v,v)}_{q(v)} + Q(v,v') + Q(v',v) + \underbrace{Q(v',v')}_{q(v')}$$

$$q(v+v') = 2Q(v,v') + q(v) + q(v')$$

$$Q(v,v') = \frac{1}{2}\left(q(v+v') - q(v) - q(v')\right)$$

↖ formuła polaryzacyjna

Dla $k>2$ wzory są bardziej paskudne, ale istnieją.

(2) Ze wzoru Taylora mamy

$$f(x_0+h) - f(x_0) - \frac{1}{k!} f^{(k)}(x_0)(h, \dots, h) = r_k(x_0, h)$$

z założenia $f^{(k)}(x_0)(h, \dots, h) < -\varepsilon \ \left(> \varepsilon \right)$ dla $\|h\| = 1$

$$f(x_0+h)-f(x_0) = \frac{1}{k!} f^{(k)}(x_0)(h,\dots,h) + r_k(x_0,k) =$$

$$= \frac{1}{k!}\|h\|^k f^{(k)}(x_0)\left(\frac{h}{\|h\|},\dots,\frac{h}{\|h\|}\right) + r_k(x_0) =$$

$$= \|h\|^k \Bigg(\underbrace{\frac{1}{k!} f^{(k)}(x_0)\left(\frac{h}{\|h\|},\dots,\frac{h}{\|h\|}\right)}_{<-\varepsilon\ (>\varepsilon)} + \frac{r_k(x_0,h)}{\|h\|^k} \Bigg) \begin{matrix} <0 \\ >0 \end{matrix}$$

dla odpowiednio małego $\|h\|$

$$\left|\frac{r_k(x_0,h)}{\|h\|}\right| < \varepsilon/2k!$$

zatem nie zmienia znaku wyrażenia

■