WYKŁAD 7

FORMY DWULINIOWE SYMETRYCZNE, FORMY KWADRATOWE

18.03.2016

ODWZOROWANIA DWULINIOWE SYMETRYCZNE

W czasie poprzednich wykładów przekonaliśmy się, że druga pochodna, jeśli istnieje, jest symetrycznym odwzorowaniem dwuliniowym. Badanie własności tego odwzorowanie jest potrzebne do określenia rodzaju punktu krytycznego odwzorowanie $X \to \mathbb{R}$. W twierdzeniu formułującym warunek wystarczający istnienie ekstremum pojawia się

$$\exists \varepsilon > 0 \ \forall h : \|h\| = 1 \quad f''(x_0)(h,h) < -\varepsilon \quad (> \varepsilon)$$

Zauważmy, że jeśli $\dim X < \infty$ wtedy $S = \{h : \|h\| = 1\}$ jest zbiorem zwartym. Wtedy $f''(x_0)(h,h)$ osiąga kresy na S. Warunek istnienia ε takiego ε, że... można zastąpić po prostu warunkiem

$$\forall h \neq 0 \quad f''(x_0)(h,h) < 0 \qquad (> 0)$$

Dalej zajmować się będziemy przypadkiem $\dim X < \infty$. Rozważać będziemy odwzorowanie dwuliniowe symetryczne $Q : X \times X \to \mathbb{R}$ tzn

$$Q(\lambda x + \mu x', y) = \lambda Q(x,y) + \mu Q(x', y)$$

$$Q(x, \alpha y + \beta y') = \alpha Q(x,y) + \beta Q(x, y')$$

$$Q(x,y) = Q(y,x)$$

Wiemy już, że $Q(x,y) = \frac{1}{2}\big(q(x+y) - q(x) - q(y)\big)$ gdzie $q(x) = Q(x,x)$ tzn Q jest wyznaczone przez q.

Mówimy, że Q jest dodatnio określone jeśli $\forall x \neq 0 \ q(x) > 0$ i ujemnie określone gdy $\forall x \neq 0 \ q(x) < 0$. Druga pochodna dodatnio określona odpowiada minimum. Druga pochodna ujemnie określona odpowiada maksimum.

1. Jak wygląda forma dwuliniowa symetryczna?

Niech $e=(e_1,\dots,e_n)$ będzie bazą w X. Wtedy każdy wektor x możemy zapisać jako

$$h = h^1 e_1 + \dots + h^n e_n = h^i e_i, \qquad k = k^1 e_1 + \dots + k^n e_n = k^i e_i \quad \text{(konwencja sumacyjna)}$$

$$Q(h,k) = Q(h^i e_i, k^j e_j) = h^i k^j \underbrace{Q(e_i, e_j)}_{Q_{ij}} = h^i k^j Q_{ij}$$

Q jest symetryczna
więc $Q_{ij} = Q_{ji}$

$$Q(h,k) = h^i k^j Q_{ij} = \begin{bmatrix} h^1 & h^2 & \dots & h^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q_{11} & \dots & Q_{1n} \\ \vdots & & \\ Q_{n1} & \dots & Q_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k^1 \\ \vdots \\ k^n \end{bmatrix}$$

Jeśli $X = \mathbb{R}^n$, e jest bazą kanoniczną, $Q = f''(x_0)$ wówczas

$$Q_{ij} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j}(x_0)$$

Nas interesują wartości q, czyli $Q(h,h)$

$$q(h) = Q(h,h) = Q_{ij} h^i h^j$$

Badać więc będziemy macierze kwadratowe symetryczne i wzory takiej postaci.

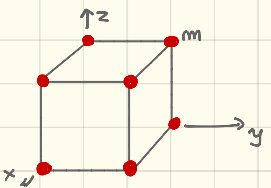
2. Różne zapisy form dwuliniowych symetrycznych, form kwadratowych i przykłady.

45

Czy w życiu studenta fizyki pojawiają się inne formy dwuliniowe symetryczne inne niż druga pochodna funkcji wielu zmiennych? Owszem! Pojawiają się! Iloczyn skalarny wektorów który powszechnie występuje na ćwiczeniach z fizyki to forma dwuliniowa symetryczna na przestrzeni wektorowej, najczęściej $\mathbb{R}^n$. Forma ta dodatkowo ma tę własność że $\|v\|^2 = (v|v) > 0$ dla $v \neq 0$ czyli jest dodatnio określona — kwadrat długości wektora jest dodatni.
Nie jest za to dodatnio określona forma stanowiąca element struktury czasoprzestrzeni Minkowskiego. Wektory czasowe mają $\eta(v,v) > 0$ a przestrzenne $\eta(v,v) < 0$ (albo odwrotnie, zależnie od konwencji.)

Kolejnym przykładem fizycznym formy dwuliniowej symetrycznej jest tensor bezwładności bryły sztywnej. Związek między energią kinetyczną a prędkością kątową bryły sztywnej to $E = \frac{1}{2} I(p,\bar{n})\,\omega^2$ gdzie E - energia, ω - prędkość kątowa I - moment bezwładności, który zależy od rozkładu masy w ciele sztywnym oraz od osi obrotu (p - punkt przez który przechodzi oś, $\bar{n}$ - kierunek osi.) Zasadniczo I oblicza się względem każdej osi oddzielnie. Można jednak zauważyć, że jeśli ustalimy p wartości I dla różnych n obliczyć można jako $I(\bar{n},\bar{n})$ (jeśli $\bar{\omega} = \omega\bar{n}$ to $I(\bar{\omega},\bar{\omega})$ pojawia się we wzorze) to I to właśnie tensor bezwładności.

Na przykład macierz tensora bezwładności bryły sztywnej w kształcie sześcianu (jednakowe masy m zlokalizowane w wierzchołkach, bok sześcianu 1, oś obrotu przechodzi przez punkt $(0,0,0)$)



$$I = m\begin{bmatrix} 8 & -2 & -2 \\ -2 & 8 & -2 \\ -2 & -2 & 8 \end{bmatrix}$$

Wyznaczanie tensora bezwładności bryły z ciągłym rozkładem masy wymaga umiejętności całkowania f. wielu zmiennych.

46

We współrzędnych $h = xe_1 + ye_2 + ze_3$

$$I(h,h) = [x\ y\ z]\begin{bmatrix} 8 & -2 & -2 \\ -2 & 8 & -2 \\ -2 & -2 & 8 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = 8x^2 + 8y^2 + 8z^2 - 4xy - 4yz - 4xz$$

I jest bardzo fajną formą bo pochodzi od czegoś prawdziwego, ale ma trochę za dużo jednakowych współczynników, żeby się nadawało do dydaktyki. Weźmy więc jakąś drugą pochodną w punkcie krytycznym:

$$f(x,y,z) = x + 4y + \frac{1}{z} + \frac{z+1}{xy}$$

$$\left.\begin{aligned} f_x &= 1 - \frac{z+1}{yx^2} = 0 \longrightarrow z+1 = yx^2 \\ f_y &= 4 - \frac{z+1}{xy^2} = 0 \longrightarrow z+1 = 4xy^2 \end{aligned}\right\} \longrightarrow yx^2 = 4xy^2$$

$$\Downarrow$$

$x=0$ lub $y=0$ lub $x=4y$

nie może być – wzór funkcji

$$f_z = -\frac{1}{z^2} + \frac{1}{xy} = 0 \longrightarrow xy = z^2$$

$$x = 4y \Rightarrow 4y^2 = z^2 \quad z = \pm 2y$$

$z = 2y$

$x = 4y$

$z + 1 = yx^2$

$2y + 1 = 16y^3$

$\longrightarrow$ np $y = 1/2$

$y = 1/2$

$x = 2$

$z = 1$

jeden z punktów krytycznych. Jest ich może więcej, ale ja potrzebuję jeden.

$f_x = 1 - \frac{z+1}{yx^2}$ $\quad f_{xx} = 2\frac{z+1}{yx^3} \to 1$ $\quad f_{xy} = \frac{z+1}{x^2y^2} \to 2$ $\quad f_{xz} = -\frac{1}{yx^2} \to -\frac{1}{2}$

$f_y = 4 - \frac{z+1}{xy^2}$ $\quad f_{yy} = 2\frac{z+1}{xy^3} \to 16$

47

$f_z = -\frac{1}{z^2} + \frac{1}{xy}$ $\quad f_{zz} = 2\frac{1}{z^3} \to 2$ $\quad f_{yz} = -\frac{1}{xy^2} \to -2$

$(x,y,z) = (2, \frac{1}{2}, 1)$

$$f''(2, \tfrac{1}{2}, 1) = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -\frac{1}{2} \\ 2 & 16 & -2 \\ -\frac{1}{2} & -2 & 2 \end{bmatrix} = Q$$

← to będzie nasza forma doświadczalna

Jak sprawdzić czy jest dodatnio określona, ujemnie czy też nieokreślona? Najlepiej byłoby zmienić bazę tak, żeby w nowych współrzędnych forma była diagonalna, wtedy będzie widać. Dlaczego?

W bazie kanonicznej $h = \delta x e_1 + \delta y e_2 + \delta z e_3$

$Q(h,h) = \delta x^2 + 16\delta y^2 + 2\delta z^2 + 4\delta x\delta y - \delta x\delta z - 4\delta y\delta z$ i nic nie widać! Jeśli w nowej bazie $v = (v_1, v_2, v_3)$ forma wyglądałaby

$$\begin{bmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & \gamma \end{bmatrix}$$

a $h = a v_1 + b v_2 + c v_3$

$$Q(h,h) = \alpha a^2 + \beta b^2 + \gamma c^2$$

kwadraty – znaczy nieujemne

Jeśli $\alpha, \beta, \gamma > 0$ to Q dodatnio określona

Jeśli $\alpha, \beta, \gamma < 0$ to Q ujemnie określona

Pytanie: Czy odpowiednia baza zawsze istnieje? Jak ją znaleźć, a właściwie jak znaleźć macierz formy w tej bazie?

Odpowiedź na pierwsze pytanie jest twierdząca —

TWIERDZENIE (LAGRANGE) Każda forma dwuliniowa symetryczna ma bazę diagonalizującą

Pozostaje dowiedzieć się jak ją znaleźć. To będą Państwo robili na algebrze. Dowiedzą się państwo że takich baz jest wiele, że można ich szukać na różne sposoby.
To co nam jest potrzebne to liczby znajdujące się na diagonali w macierzy formy w nowej bazie. Sama baza nie jest potrzebna. Zamiast ogólnego przepisu na poszukiwanie tych liczb rozwiążemy konkretny przykład

$$Q(h,h) = \underbrace{\delta x^2} + 16\delta y^2 + 2\delta z^2 + \underbrace{4\delta x\delta y} - \underbrace{\delta x\delta z} - 4\delta y\delta z =$$

$$= \delta x^2 + 2\delta x\left(2\delta y - \tfrac{1}{2}\delta z\right) + 16\delta y^2 + 2\delta z^2 - 4\delta y\delta z =$$

$$= \left(\delta x + 2\delta y - \tfrac{1}{2}\delta z\right)^2 - \left(2\delta y - \tfrac{1}{2}\delta z\right)^2 + 16\delta y^2 + 2\delta z^2 - 4\delta y\delta z =$$

$$= \left(\delta x + 2\delta y - \tfrac{1}{2}\delta z\right)^2 - 4\delta y^2 + 2\delta y\delta z - \tfrac{1}{4}\delta z^2 + 16\delta y^2 + 2\delta z^2 - 4\delta y\delta z =$$

$$= \left(\delta x + 2\delta y - \tfrac{1}{2}\delta z\right)^2 + \underbrace{12\delta y^2} - \underbrace{2\delta y\delta z} + \tfrac{7}{4}\delta z^2 =$$

$$= \left(\delta x + 2\delta y - \tfrac{1}{2}\delta z\right)^2 + 12\left(\delta y^2 - \tfrac{1}{6}\delta y\delta z\right) + \tfrac{7}{4}\delta z^2 =$$

$$= \left(\delta x + 2\delta y - \tfrac{1}{2}\delta z\right)^2 + 12\left(\delta y - \tfrac{1}{12}\delta z\right)^2 - \tfrac{1}{12}\delta z^2 + \tfrac{7}{4}\delta z^2 =$$

$$= \left(\delta x + 2\delta y - \tfrac{1}{2}\delta z\right)^2 + 12\left(\delta y - \tfrac{1}{12}\delta z\right)^2 + \tfrac{20}{12}\delta z^2$$

Liczby na diagonali $\alpha = 1$ $\beta = 12$ $\gamma = \frac{20}{12} = \frac{10}{6}$ wszystkie dodatnie, tzn formą jest dodatnio określona, tzn funkcja f ma w $(2, \frac{1}{2}, 1)$ minimum.

$$= \left(\delta x + 2\delta y - \tfrac{1}{2}\delta z\right)^2 + 12\left(\delta y - \tfrac{1}{12}\delta z\right)^2 + \frac{20}{12}\delta z^2$$

Nowe współrzędne (a, b, c) dane są wzorami

$a = \delta x + 2\delta y - \frac{1}{2}\delta z$ — z tego można „odzyskać" nową bazę (v_1, v_2, v_3)

$b = \delta y - \frac{1}{12}\delta z$ — Zacząć trzeba od wyznaczenia $\delta x, \delta y, \delta z$ w

$c = \delta z$ — zależności od a, b, c

$$\delta z = c$$

$$\delta y = b + \frac{1}{12}\delta z = b + \frac{1}{12}c$$

$$\delta x = a - 2\delta y + \frac{1}{2}\delta z = a - 2\left(b + \frac{1}{12}c\right) + \frac{1}{2}c = a - 2b + \frac{1}{3}c$$

Mamy teraz $h = \delta x\, e_1 + \delta y\, e_2 + \delta z\, e_3 = \left(a - 2b - \frac{1}{3}c\right)e_1 + \left(b + \frac{1}{12}c\right)e_2 + c\, e_3 =$

$$= a\, e_1 + b(-2e_1 + e_2) + c\left(-\frac{1}{3}e_1 + \frac{1}{12}e_2 + e_3\right)$$

$$v_1 = e_1 \qquad v_2 = -2e_1 + e_2 \qquad v_3 = -\frac{1}{3}e_1 + \frac{1}{12}e_2 + e_3$$

$$v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad v_2 = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad v_3 = \begin{bmatrix} -1/3 \\ 1/12 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Dygresje algebraiczne nie potrzebne w analizie

Powiedzieliśmy wcześniej, że baz diagonalizujących formę jest dużo. Stosując metodę Lagrange'a otrzymaliśmy jedną z nich. Gdybyśmy jednak zaczęli od δy a nie δx i postępowali podobnie dostalibyśmy inną bazę diagonalizującą i inne współczynniki. Np:

$$Q(h,h) = \delta x^2 + 16\delta y^2 + 2\delta z^2 + 4\delta x\delta y - \delta x\delta z - 4\delta y\delta z =$$

$$= 16\left(\delta y^2 + \frac{1}{4}\delta y(\delta x - \delta z)\right) + \delta x^2 + 2\delta z^2 - \delta x\delta z = 16\left(\delta y + \frac{1}{8}(\delta x - \delta z)\right)^2 - \frac{1}{4}\left(\delta x^2 - 2\delta x\delta z + \delta z^2\right) + \delta x^2 + 2\delta z^2 - \delta x\delta z = 16\left(\delta y + \frac{1}{8}\delta x - \frac{1}{8}\delta z\right)^2 + \frac{3}{4}\delta x^2 + \frac{3}{4}\delta z^2 - \frac{1}{2}\delta x\delta z = 16\left(\delta y + \frac{1}{8}\delta x - \frac{1}{8}\delta z\right)^2 + \frac{3}{4}\left(\delta x^2 - \frac{2}{3}\delta x\delta z\right) + \frac{3}{4}\delta z^2 = 16(\ldots)^2 + \frac{3}{4}\left(\delta x - \frac{1}{3}\delta z\right)^2 + \left(\frac{3}{4} - \frac{1}{12}\right)\delta z^2 =$$

$$= 16(\ldots)^2 + \frac{3}{4}\left(\delta x - \frac{1}{3}\delta z\right)^2 + \left(\frac{3}{4} - \frac{1}{12}\right)\delta z^2 = +16(\ldots)^2 + \frac{3}{4}(\ldots)^2 + \frac{2}{3}\delta z^2$$

na diagonali inne liczby ale też wszystkie dodatnie

Gdyby różne metody diagonalizacji dawały różne wyniki co do określoności formy, znaczyłoby to, że samo pojęcie jest bez sensu. Na szczęście mamy

TWIERDZENIE (SYLVESTERA O BEZWŁADNOŚCI FORM) Jeśli $(\alpha^1, \ldots, \alpha^n)$, $(\beta^1, \ldots, \beta^n)$ są układami współrzędnych odpowiadającymi dwum bazom diagonalizującym formę kwadratową q i jeśli

$$q(\alpha^1, \ldots, \alpha^n) = a_1(\alpha^1)^2 + a_2(\alpha^2)^2 + \cdots + a_n(\alpha^n)^2$$
$$q(\beta^1, \ldots, \beta^2) = b_1(\beta_1)^2 + b_2(\beta^2)^2 + \cdots + b_m(\beta_n)^2$$

to w zbiorach $A = \{a_1, \ldots, a_n\}$ i $B = \{b_1, \ldots, b_m\}$ jest tyle samo współczynników dodatnich, ujemnych i zerowych.

Parę (p, q) gdzie p jest liczbą współczynników dodatnich, q liczbą współczynników ujemnych nazywamy sygnaturę formy kwadratowej

Jeśli na przestrzeni wymiaru n sygnatura jest $(n, 0)$ to forma jest dodatnio określona. Jeśli sygnatura jest $(0, n)$ to forma jest ujemnie określona. Jeśli $p + q = n$ to forma jest niezdegenerowana. Ma to miejsce wtedy, gdy odwzorowanie

$$\tilde{Q} : X \ni v \longmapsto \tilde{Q}(v, \cdot) \in L(X, \mathbb{R}) = X'$$ ma trywialne jądro.

Iloczyn skalarny ma z definicji sygnaturę $(n, 0)$, podobnie tensor bezwładności. Metryka na przestrzeni Minkowskiego ma sygnaturę $(1, 3)$ nazywaną sygnaturą Lorenzowską.

Metoda Lagrange'a diagonalizacji i badanie sygnatury jest pracochłonna – wymaga dużo rachunków. Istnieje inna metoda, której użycie wymaga umiejętności liczenia wyznacznika macierzy. Weźmy macierz formy

51

$$
Q = \begin{array}{c} D_1 \\ D_2 \\ D_3 \\ \\ D_{n-1} \\ D_n \end{array}
\begin{bmatrix}
Q_{11} & Q_{12} & Q_{13} & \cdots & Q_{1\,n-1} & Q_{1n} \\
Q_{21} & Q_{22} & Q_{23} & \cdots & Q_{2\,n-1} & Q_{2n} \\
Q_{31} & Q_{32} & Q_{33} & \cdots & Q_{3\,n-1} & Q_{3n} \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\
Q_{n-1\,1} & Q_{n-1\,2} & Q_{n-1\,3} & \cdots & Q_{n-1\,n-1} & Q_{n-1\,n} \\
Q_{n\,1} & Q_{n\,2} & Q_{n\,3} & \cdots & Q_{n\,n-1} & Q_{nn}
\end{bmatrix}
$$

$D_1, D_2, \ldots, D_{n-1}, D_n$ niech będą wyznacznikami minorów głównych tej macierzy. Załóżmy także, że wyjściowa baza jest taka, że wyznaczniki $D_1, \ldots, D_k$ są niezerowe a $D_{k+1} = \ldots = D_n = 0$. (Oczywiście k może być równe n) Wtedy sygnatura formy jest równa liczbie dodatnich i ujemnych wyrazów w ciągu

$$D_1, \frac{D_2}{D_1}, \frac{D_3}{D_2}, \ldots, \frac{D_k}{D_{k-1}}$$

Dla dodatnio określonej formy oznacza to $\forall i \in \{1, \ldots, n\}\ D_i > 0$

Dla ujemnie określonej formy w ciągu $(D_1, \ldots, D_n)$ znaki są na zmianę zaczynając od ujemnego $(- + - + - \ldots)$

Dowód twierdzenia na którym opiera się powyższa metoda powinien być na algebrze (podobnie jak tw. Lagrange'a o diagonalizacji i twierdzenie Sylvestera o bezwładności). Dowód ten oparty jest na innej metodzie diagonalizacji formy zwanej ortogonalizacją Grama-Schmidta.

52

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -\frac{1}{2} \\ 2 & 16 & -2 \\ -\frac{1}{2} & -2 & 2 \end{bmatrix}$$

$D_1 = 1 > 0$

$D_2 = 1 \cdot 16 - 2 \cdot 2 = 16 - 4 = 12 > 0$

$D_3 = 32 + 2 + 2 - 4 - 8 - 4 = 36 - 16 = 20 > 0$

sygnature $(3,0)$