WYKŁAD 8

TWIERDZENIE O LOKALNEJ ODWRACALNOŚCI

Twierdzenie o lokalnej odwracalności jest banachowskim odpowiednikiem twierdzenia o istnieniu i różniczkowalności funkcji odwrotnej, którego częścią był wzór $(f^{-1})'(y) = 1/f'(f^{-1}(y))$. 53

Od strony praktycznej twierdzenie to jest ważne przy rozważaniu krzywoliniowych układów współrzędnych na przestrzeni skończeniewymiarowej.

TWIERDZENIE (O LOKALNEJ ODWRACALNOŚCI) X, Y przestrzenie Banacha $f: X \supset \mathcal{U} \longrightarrow Y$ odwzorowanie klasy C^1, $x_0 \in \mathcal{U}$, $y_0 = f(x_0) \in Y$ $f'(x_0): X \to Y$ jest odwracalne. Wtedy istnieją otwarte otoczenie ϑ punktu x_0, $\vartheta \subset \mathcal{U}$ i V punktu y_0 takie, że

$f|_\vartheta$ jest bijekcją ϑ na V, $f^{-1}: V \to \vartheta$ jest klasy C^1 i

$$\forall y \in V \quad (f^{-1})'(y) = \left[f'(f^{-1}(y))\right]^{-1}$$

DOWÓD Dowód jest dość długi, podzielimy go więc na pewne etapy:

(1) $f'(x)$ jest odwracalne nie tylko w x_0 ale także na pewnym otoczeniu x_0

W teorii przestrzeni Banacha funkcjonuje twierdzenie o wykresie domkniętym które mówi że $T: V \to W$ jest liniowe i ciągłe wtedy i tylko wtedy gdy $G_T = \{(v, T(v)) : v \in V\} \subset V \times W$ jest podprzestrzenią domkniętą. Zbiór G_T nazywa się wykresem T. Dowód $\Rightarrow$ jest łatwy, $\Leftarrow$ trudny. Jeśli T jest odwracalne to G_T i $G_{T^{-1}}$ różnią się o transpozycję w iloczynie kartezjańskim, więc jeśli T jest ciągłe to T^{-1} też.

Z tego twierdzenia wynika więc, że $[f'(x_0)]^{-1}$ jest odwzorowaniem liniowym i ciągłym. Wykażemy teraz, że zbiór odwzorowań odwracalnych w $B(X,Y)$ jest zbiorem otwartym.

Weźmy $T \in B(X,Y)$ i T^{-1} istnieje. Z rozważań n.t. tw. o wykresie domkniętym wiemy, że T^{-1} jest ciągłe zatem $\|T^{-1}\|$ jest dobrze określona. Weźmy dowolne $S \in B(X,Y)$ takie że $\|S\| < \frac{1}{\|T^{-1}\|}$ wtedy

54

$$\|T^{-1}S\| \leq \|S\| \|T^{-1}\| < 1$$

W takim przypadku istnieje $(\mathbb{1} + T^{-1}S)^{-1}$. Istotnie, niech $F = -T^{-1}S$. Pokażemy że istnieje $(\mathbb{1} - F)^{-1}$. Zaproponujmy ten operator w postaci szeregu $\lim\limits_{n\to\infty} (\mathbb{1} + F + F^2 + \dots + F^n)$. Szereg ten jest zbieżny gdyż $\|F\| < 1$

$$\left\| \sum_m^n F^i \right\| \leq \sum_m^n \|F\|^i \leq \sum_m^\infty \|F^i\| = \frac{\|F\|^m}{1 - \|F\|} \longrightarrow 0$$

Mamy $(\mathbb{1} - F) \lim\limits_{n\to\infty} (1 + F + \dots + F^n) = \lim\limits_{n\to\infty} \left[(\mathbb{1} - F)(1 + F + \dots + F^n) \right] = \lim\limits_{n\to\infty} (\mathbb{1} - F + F - F^2 + F^2 \dots - F^{n+1}) = \lim\limits_{n\to\infty} (\mathbb{1} - F^{n+1}) = \mathbb{1}$ (podobnie w drugiej kolejności)

Wiemy więc, że istnieje $(\mathbb{1} + T^{-1}S)^{-1}$. $T \circ (\mathbb{1} + T^{-1}S) = (T + S)$

$(T \circ (\mathbb{1} + T^{-1}S))^{-1} = (\mathbb{1} + T^{-1}S)^{-1} T^{-1} = (T+S)^{-1}$ zatem istnieje odwrotne do $T+S$ dla dowolnych S: $\|S\| < \frac{1}{\|T^{-1}\|}$. Zbiór odwzorowań odwracalnych zawiera więc kulę o środku w T i promieniu $1/\|T^{-1}\|$

Wracając do problemu pochodnych, żeby wykazać, że $f'(x)$ jest odwracalne nie tylko w x_0 ale i w pobliżu x_0 musimy wykazać że $f'(x)$ jest blisko $f'(x_0)$ w normie operatorowej. Z założenia jednak wiemy że $f'(x)$ zależy od x w sposób ciągły zatem $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0$ taka, że jeśli $\|x - x_0\| < \delta$ to $\|f'(x) - f'(x_0)\| < \varepsilon$. Wystarczy więc wziąć $\varepsilon = \frac{1}{2\|[f'(x_0)]^{-1}\|}$ aby uzyskać wniosek, że istnieje δ taka, że dla

↑ na teraz wystarczy 1, 2 przyda się później.

$x \in K(x_0, \delta)$ $f'(x) \in K\left(f'(x_0), \frac{1}{2\|(f'(x_0))^{-1}\|}\right)$ w której są jedynie odwzorowania odwracalne. Jako $\mathcal{O}$ weźmiemy więc $K(x_0, \delta)$.

(2) f jest różnowartościowe na ϑ

55

Dla $y \in Y$ zdefiniujmy pomocnicze odwzorowanie $\phi_y : \mathcal{U} \to X$

$$\phi_y(x) = x + [f'(x_0)]^{-1}(y - f(x))$$

mamy $y = f(x) \Leftrightarrow \phi_y(x) = x$. Odwzorowanie ϕ_y jest różniczkowalne:

$$\phi_y'(x) = 1\!\!1_X - [f'(x_0)]^{-1} f'(x) = [f'(x_0)]^{-1}\underbrace{(f'(x_0) - f'(x))}$$

dla $x \in \vartheta$ to ma normę mniejszą niż $\frac{1}{2}\| f'(x_0)^{-1}\|$

dla $x \in \vartheta$ $\quad \| \phi_y'(x)\| < \frac{1}{2}$

Weźmy teraz $x_1, x_2 \in \vartheta$ wtedy

$$\| \phi_y(x_2) - \phi_y(x_1)\| = \|\phi(x_2 + \overbrace{(x_1 - x_2)}^{h}) - \phi(x_2)\| \leq \|x_1 - x_2\| \sup_{t \in]0,1[} \| \phi_y'(x_2 + t(x_1 - x_2))\| <$$

$$\leq \frac{1}{2}\|x_1 - x_2\|$$

Odwzorowanie $\phi_y|_\vartheta$ jest odwzorowaniem, które nazywamy zbliżającym. Dla odwzorowań zbliżających mamy twierdzenie, które tu posłuży nam za lemat:

TWIERDZENIE Niech X zupełna przestrzeń metrycz. $\varphi : X \to X$ zbliżające tzn istnieje $0 < \lambda < 1$ taka, że $\forall x_1, x_2 \quad d(\varphi(x_1), \varphi(x_2)) \leq \lambda d(x_1, x_2)$ wtedy φ ma dokładnie jeden punkt stały, tzn $\exists! x_0 : \varphi(x_0) = x_0$

DOWÓD

$x_1 \in X$ dowolny $x_2 = \varphi(x_1) \ \dots \ x_n = \varphi(x_{n-1})$

$$d(x_n, x_{n+k}) = d(\varphi^{n-1}(x_1), \varphi^{n-1}(x_{k+1})) \leq \lambda^{n-1} d(x_1, x_{k+1}) \leq$$

$$\leq \lambda^{n-1}(d(x_1, x_2) + d(x_2, x_3) + \dots + d(x_k, x_{k+1})) \leq \lambda^{n-1}(\lambda + \lambda^2 + \dots + \lambda^{k-1}) d(x_1, x_2) =$$

$$= \lambda^{n-1} \frac{1 - \lambda^k}{1 - \lambda} d(x_1, x_2) \longrightarrow 0$$

(x_n) jest ciągiem Cauchy'ego w p. zupełnej. Ma granicę, oznaczmy ją x_0. Dla x_0 mamy, z ciągłości φ

56

$$\varphi(x_0) = \varphi(\lim x_n) = \lim \varphi(x_n) = \lim x_{n+1} = x_0 \quad \text{i.e} \quad \varphi(x_0) = x_0$$

Załóżmy że $\exists y: \varphi(y) = y$. Wtedy

$$d(x_0, y) \leq \lambda\, d(\varphi(x_0), \varphi(y))$$

$$d(\varphi(x_0), \varphi(y)) \longrightarrow d(x_0, y) = 0 \rightarrow y = x_0$$

■

Wróćmy do Φ_y. Jest to odwzorowanie zbliżające, więc dla tych y dla których $\Phi_y|_\vartheta$ ma wartości w ϑ odwzorowanie to ma dokładnie jeden punkt stały. Dla jakich y tak jest? Patrząc na wzór $\Phi_y(x) = x + (f'(x_0))^{-1}(y - f(x))$ stwierdzamy, że dla takich dla których $y - f(x)$ jest niedużo, czyli dla y w pobliżu $f(x)$ (dla $x \in \vartheta$), z całą pewnością dla $y \in f(\vartheta)$. Punkt stały to punkt $x: y = f(x)$, jednoznacznie wyznaczony dla y. Wnioskujemy, że $f|_\vartheta$ jest różnowartościowe.

(3) Weźmy $V = f(\vartheta)$. Z definicji V i z punktu (2) $f: \vartheta \longrightarrow V$ jest bijekcją. Pokazać należy, że V jest otoczeniem y_0, czyli w szczególności, że V jest zbiorem otwartym w Y.

Weźmy $y \in V$ i odpowiedni, jedyny $x \in \vartheta$ taki, że $f(x) = y$. Wiemy, że ϑ jest otwarty więc istnieje r: $\overline{K}(x, r) \subset \vartheta$. Weźmy promień $d = \frac{r}{2\|f'(x_0)^{-1}\|}$

Pokażemy, że $\forall_{z \in K(y,d)}\ z \in V$

Weźmy więc dowolne $z \in K(y, d)$ i rozważmy $\Phi_z(\xi)$ dla $\xi \in K(x, r)$

$$\|\Phi_z(\xi) - x\| \leq \|\Phi_z(\xi) - \Phi_z(x)\| + \|\Phi_z(x) - x\| \leq \frac{1}{2}\|\xi - x\| + \|f'(x_0)^{-1}(z - \overset{y}{\overset{\|}{f(x)}})\| \leq$$

$$\leq \frac{1}{2}r + \|f'(x_0)^{-1}\| \underbrace{\|z - y\|}_{\leq d} \leq \frac{1}{2}r + \frac{1}{2}r = r \qquad \Phi_z(\xi) \in K(x, r) \subset \vartheta$$

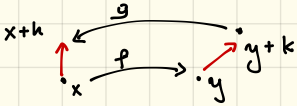
$\Phi_\zeta|_{K(x,r)}$ ma wartości w $K(x,r)\subset\mathcal{O}$ zatem Φ_ζ ma punkt stały w $\mathcal{O}$, a nawet więcej w $K(x,r)$. Nazwijmy ten punkt stały ξ_0. Wiadomo zatem, że $\Phi_\zeta(\xi_0)=\xi_0$ czyli $f(\xi_0)=\zeta$. Wniosek: $\zeta\in f(\mathcal{O})=\mathcal{V}$. ζ było dowolne z $K(y,d)$, zatem $K(y,d)\subset\mathcal{V}$ i $\mathcal{V}$ otwarty.

(4) Wiemy już że istnieją $\mathcal{O}$ i $\mathcal{V}$ otoczenia x_0 i y_0 takie, że $f:\mathcal{O}\to\mathcal{V}$ jest bijekcją, tzn f^{-1} istnieje. Dowodzimy teraz różniczkowalności f^{-1}.

Dla ułatwienia notacji oznaczamy $f^{-1}=:g$

Weźmy $y\in\mathcal{V}$ i $k\in Y$ taki, żeby $y+k\in\mathcal{V}$, czyli $\|k\|$ małe. Spodziewamy się, zgodnie z tezą, że $g'(y)=(f'(x))^{-1}$ dla $x:\ f(x)=y$

$$r_g(y,k)=g(y+k)-g(y)-(f'(x))^{-1}k=\cancel{x}+h-\cancel{x}-(f'(x))^{-1}k=$$



$$=h-(f'(x))^{-1}k=[f'(x)]^{-1}\left(f'(x)h-k\right)=$$

$$=[f'(x)]^{-1}\left(f'(x)h-[f(x+h)-f(x)]\right)=-[f'(x)]^{-1}\left(f(x+h)-f(x)-f'(x)h\right)=$$

$$=-[f'(x)]^{-1}r_f(x,h)$$

$$r_g(h,k)=-[f'(x)]^{-1}r_f(x,h)$$

$k\to 0$ pociąga $h\to 0$

$$\frac{\|r_g(h,k)\|}{\|k\|}=\frac{1}{\|k\|}\left\|[f'(x)]^{-1}\right\|\|r_f(x,h)\|\le\|(f'(x))^{-1}\|\underbrace{\frac{\|h\|}{\|k\|}}_{\text{ograniczone}}\underbrace{\frac{\|r_f(x,h)\|}{\|h\|}}_{\xrightarrow{h\to 0}\ 0}$$

jak się ma h do k

$$\|\Phi_y(x+h)-\Phi_y(x)\|\le\tfrac{1}{2}\|h\|$$

$$\Phi_y(x+h)-\Phi_y(x)=x+h+\underbrace{[f'(x_0)]^{-1}}_{A}(y-f(x+h))-\left(x+[f'(x)]^{-1}(y-f(x))\right)=\cancel{x}+h+\cancel{Ay}-A(f(x+h))$$

$$-\cancel{x}-\cancel{Ay}+Af(x)=h-A(\underbrace{f(x+h)-f(x)}_{k})=h-[f'(x)]^{-1}k$$

$$\|h - \underbrace{[f'(x_0)]^{-1}}_{A} k\| \leq \frac{1}{2}\|h\|$$

$$h = h + Ak - Ak \quad \|h\| \leq \|h - Ak\| + \|Ak\| \leq \frac{1}{2}\|h\| + \|A_k\|$$

$$\frac{1}{2}\|h\| \leq \|Ak\| \leq \|A\|\|k\|$$

$\|h\| \leq 2\|A\|\,\|k\|$ zatem $k \to 0$ pociąga $h \to 0$

$\frac{\|h\|}{\|k\|} \leq 2\|A\|$ tzn ograniczone.

Pokazaliśmy więc, że reszta zachowuje się właściwie.

(5) Udowodniliśmy różniczkowalność f^{-1}. Pozostaje wykazać "w sposób ciągły" Ponieważ mamy wzór $(f^{-1})'(y) = [f'(f^{-1}(y))]^{-1}$ i wiemy, że f jest różniczkowalna w sposób ciągły wystarczy pokazać, że ciągłe jest odwzorowanie

$$B(X,Y) \ni T \overset{D}{\longmapsto} T^{-1} \in B(Y,X)$$

W celach ogólnorozwojowych pokażemy więcej – jest to odwzorowanie różniczkowalne i

$$D'(T)H = -T^{-1} \circ H \circ T^{-1} \quad (H \in B(X,Y) \text{ - przyrost})$$

$$D(T+H) - D(T) = (T+H)^{-1} - T^{-1} = (\mathbb{1} + T^{-1}H)^{-1}T^{-1} - T^{-1} =$$

$$= [(\mathbb{1} + T^{-1}H)^{-1} - \mathbb{1}]T^{-1} = [\mathbb{1} - T^{-1}H + (T^{-1}H)^2 - \dots - \mathbb{1}]T^{-1} =$$

Jeśli $\|T^{-1}H\| < 1$ tzn $\|H\| < 1/\|T^{-1}\|$

$$= \underbrace{-T^{-1}HT^{-1}}_{\text{pochodna}} + \underbrace{(T^{-1}H)^2T^{-1} + \dots}_{\text{reszta}}$$

$$\|(T^{-1}H)^2T^{-1} + (T^{-1}H)^3T^{-1} + \dots\| \leq \|T^{-1}\|\,\|T^{-1}H\|^2(1 + \|T^{-1}H\| + \dots) \leq$$

$$\leq \|T^{-1}\|^3 \underbrace{\|H\|^2}\ \frac{1}{1 - \|T^{-1}H\|}$$

ten czynnik gwarantuje zachowanie reszty. ∎