WYKŁAD 9

TWIERDZENIE O FUNKCJII UWIKŁANEJ + PRZYKŁAD RACHUNKOWY

PRZESTRZEŃ AFINICZNA

1.04.2016

Twierdzenie o lokalnej odwracalności używane już było na ćwiczeniach przy okazji zadań w których chodziło o zamianę zmiennych w pewnych operatorach różniczkowych. Więcej na ten temat będzie w pewnym komentarzach za chwilę. Na razie sformułować musimy jeszcze jedno twierdzenie

TWIERDZENIE X, Y, Z - przestrzenie Banacha $X\oplus Y \supset \mathcal{U}$ otwarty $f: \mathcal{U} \to Z$ odwzorowanie klasy C^1 $(x_0, y_0) \in \mathcal{U}$, $f(x_0,y_0) = 0$

Jeśli $f'_y(x_0,y_0)$ jest izomorfizmem $Y \to Z$ wtedy istnieje otoczenie $\mathcal{O}$ punktu x_0 w X i $\mathcal{V}$ punktu y_0 w Y takie, że $\mathcal{O}\times\mathcal{V} \subset \mathcal{U}$ oraz odwzorowanie $g: \mathcal{O} \to \mathcal{V}$ takie, że $f(x, g(x)) = 0$, g jest klasy C^1 oraz

$$g'(x) = -\left[f'_y(x, g(x))\right]^{-1} f'_x(x, \varphi(x))$$

DOWÓD: W dowodzie korzystamy z twierdzenia o istnieniu odwzorowania odwrotnego. W tym celu skonstruujmy

$$\Phi: X\oplus Y \supset \mathcal{U} \longrightarrow X \oplus Z$$
$$(x,y) \longmapsto (x, f(x,y))$$

Φ jest klasy C^1 jako złożenie odwzorowań klasy C^1. Liczymy pochodną:

$$\Phi'(x,y) \in B(X\oplus Y, X\oplus Z) \qquad \Phi'(x,y) = \begin{bmatrix} 1_X & 0 \\ f'_x & f'_y \end{bmatrix}$$

$$\left[\begin{array}{c|c} X\to X & Y\to X \\ \hline X\to Z & Y \to Z \end{array}\right]\begin{bmatrix} h \\ k \end{bmatrix}$$

Z założenia, że f'_y jest izomorfizmem wynika że $\Phi'(x_0,y_0)$ jest izomorfizmem

Φ spełnia więc założenia tw. o lokalnej odwracalności. Na podstawie tego twierdzenia istnieje otoczenie $\Omega \subset X\oplus Y$ punktu (x_0,y_0) (zmniejszając ewentualnie Ω można uznać, że jest postaci $\mathcal{O}\times\mathcal{V}$) i otoczenie Λ punktu $(x_0, 0) \in X\oplus Z$ takie że $\Phi: \Omega \to \mathcal{V}$ jest bijekcją, istnieje Φ^{-1} klasy C^1 oraz

$$(\Phi^{-1})'(\Phi(\xi,\eta)) = \Phi'(\xi,\eta)^{-1}$$

$\Phi(x,y)=(x,f(x,y))$ bijekcja tzn $\forall (x,y)\ \exists!\ (\xi,\zeta) : (\xi,\zeta)=(x,f(x,y))$
Odwzorowanie Φ^{-1} musi być postaci

$$(\xi,\zeta)\longmapsto(\xi,\underbrace{\Psi(\xi,\zeta)}_{y})$$

60

Możemy więc położyć $g(x)=\Psi(x,0)$ Φ jest klasy C^1, więc Ψ oraz g są także C^1, ponadto mamy równość

$0=f(x,g(x))$ tzn $x\longmapsto f(x,g(x))$ jest stała i ma pochodną równą zero. Ta pochodna to odwzorowanie

$$h\longmapsto f'_x(x,g(x))h+f'_y(x,g(x))g'(x)h \quad (=0)$$

$\forall h$ $$f'_y(x,g(x))g'(x)h=-f'_x(x,g(x))h$$

$$g'(x)h=-\left[f'_y(x,g(x))\right]^{-1}f'_x(x,g(x))h$$

tzn $$g'(x)=-\left[f'_y(x,g(x))\right]^{-1}f'_x(x,g(x))$$

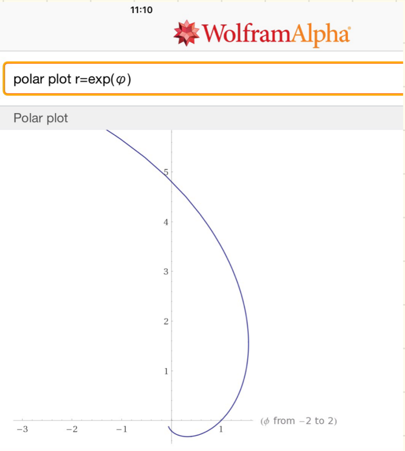
$\blacksquare$

TFU daje nam narzędzia dzięki którym możemy policzyć różne rzeczy na temat funkcji zadanej w sposób uwikłany nie znając samej funkcji

Weźmy np $f(x,y)=\log\sqrt{x^2+y^2}-\operatorname{arctg}\left(\frac{y}{x}\right)$ dla $x>0$

$f(x,y)=0$ oznacza $\log\sqrt{x^2+y^2}=\operatorname{arctg}\left(\frac{y}{x}\right)$

$\left(r=\exp\varphi \text{ biegunowo } \varphi\in\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[\right)$



Sprawdzić że w otoczeniu $x_0=1$ równanie określa y jako funkcję x. Znaleźć y' i y'' w zależności od x,y

$\frac{1}{2}\log(x^2+y^2)$ ‖

61

$$f(x,y)=\log\sqrt{x^2+y^2}-\operatorname{arctg}\left(\frac{y}{x}\right)$$

$$f_y(x,y)=\frac{1}{\cancel{2}}\cdot\frac{1}{x^2+y^2}\cdot\cancel{2}y-\frac{1}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}\left(\frac{1}{x}\right)=$$

$$=\frac{y}{x^2+y^2}-\frac{x}{x^2+y^2}=\frac{x-y}{x^2+y^2}=0\ ?$$

$y=x \qquad \frac{1}{2}\log(2x^2)=\frac{\pi}{4} \qquad \log(2x^2)=\frac{\pi}{2} \qquad 2x^2=\exp(\pi/2) \qquad x^2=\frac{1}{2}\exp(\pi/2)$

$$x=\cancel{\pm}\frac{1}{\sqrt{2}}\exp(\pi/4)$$

poza $x=1/\sqrt{2}\exp(\pi/4)=y$ f zadaje y jako funkcję od x ale nie wiemy ile tych funkcji jest. (z obrazka widać że dwie) Mimo to możemy policzyć pochodną:

$$\frac{1}{2}\log(x^2+y^2)=\operatorname{arctg}(y/x)$$

$$\frac{1}{\cancel{2}}\frac{1}{x^2+y^2}(\cancel{2}x+\cancel{2}y\,y_x)=\frac{1}{1+\frac{y^2}{x^2}}\left(-\frac{y}{x^2}+\frac{y_x}{x}\right)$$ wyznaczamy y_x

$$\frac{x}{x^2+y^2}+\frac{y}{x^2+y^2}y_x=\frac{-y}{x^2+y^2}+\frac{x\,y_x}{x^2+y^2} \qquad \frac{y-x}{x^2+y^2}y_x=-\frac{y+x}{y^2+x^2}$$

$$y_x=-\frac{y+x}{y-x}$$

na podstawie tego równania możemy sprawdzić czy te funkcje mają punkt krytycz. gdy $y_x=0$ tzn $y=-x$, $\log\sqrt{x^2+(-x^2)}-\operatorname{arctg}\left(\frac{-x}{x}\right)\Rightarrow\log\sqrt{2x^2}=-\pi/4$

$\sqrt{2x^2}=\exp(-\pi/4) \qquad x=\frac{1}{\sqrt{2}}\exp(-\pi/4)$. Wydaje się więc że „dolna" funkcja ma punkt krytyczny. Można też zbadać jego typ. Załóżmy ogólnie, że w otoczeniu (x_0,y_0) równanie $f(x,y)=0$ określa y jako funkcję x. Znajdźmy y'' (y_{xx})

$$f(x,y)=0 \quad f_x + f_y y_x = 0 \longrightarrow y_x = -\frac{1}{f_y} f_x$$

Niech x_1 : $f_x(x_0,y_0)=0$ tzn x_0 jest punktem krytycznym y.

62

$$\downarrow$$

$$f_{xx} + f_{xy} y_x + f_{yx} y_x + f_{yy} y_x^2 + f_y y_{xx} = 0$$

$$y_{xx} = -\frac{1}{f_y}\left(f_{xx} + 2 f_{xy} y_x + f_{yy} y_x^2\right)$$

y_{xx} w otoczeniu x_0

$= 0$ w punkcie krytycznym

$$y_{xx}(x_0) = -\frac{1}{f_y(x_0,y_0)} f_{xx}(x_0,y_0)$$

y_{xx} w x_0.

W naszym przypadku

$$f(x,y) = \log\sqrt{x^2+y^2} - \operatorname{arctg}\left(\frac{y}{x}\right)$$

$$f_x = \cancel{\frac{1}{2}} \frac{1}{x^2+y^2} \cdot \cancel{2}x - \frac{1}{1+(y/x)^2}\left(-\frac{y}{x^2}\right) = \frac{x}{x^2+y^2} - \frac{y}{x^2+y^2} = \frac{x+y}{x^2+y^2}$$

$$f_{xx} = \frac{(x^2+y^2) - 2x(x+y)}{(x^2+y^2)^2} = \frac{x^2+y^2-2x^2-2xy}{(x^2+y^2)^2} = \frac{y^2-x^2-2xy}{(x^2+y^2)^2}$$

$$y_{xx} = -\frac{1}{f_y} f_{xx} = -\frac{\cancel{x^2+y^2}}{x-y} \cdot \frac{y^2-x^2-2xy}{(x^2+y^2)^{\cancel{2}}} \underset{y=-x}{=} -\frac{x^2-x^2-2x^2}{2x(x^2+x^2)} = +\frac{2x^2}{4x^3} = +\frac{1}{2x} =$$

$$= \Big|_{x=\frac{1}{\sqrt{2}}\exp(-\pi/4)} + \frac{1\cdot\sqrt{2}}{2\cdot\exp(-\pi/4)} = +\frac{1}{\sqrt{2}}\exp(\pi/4) > 0$$

funkcja ma minimum.

Krzywoliniowe układy współrzędnych: było na ćwiczeniach, było na fizyce, teraz popatrzmy na nie od strony teoretycznej. Rozważania prowadzimy w przypadku $\dim X < \infty$

63

(1) X jest przestrzenią wektorową, jednak funkcje które na niej rozważamy często nie są liniowe. Nie jest więc ważne, że $x \in X$ jest wektorem. Ważne jest, że przyrosty „h" są wektorami i że możemy napisać $x+h \in X$. Ostatecznie przy głębszym przyjrzeniu się sytuacji wykorzystujemy afiniczną a nie wektorową strukturę X.

DEFINICJA: Przestrzenią afiniczną nazywamy zbiór A wraz z przestrzenią wektorową V i odwzorowaniem $\alpha : A \times V \longrightarrow A$ takim, że

$$\alpha(\alpha(a,v),w) = \alpha(a, v+w), \quad \alpha(a,\bar{0}) = a, \quad \forall a,b \in A \ \exists!\, v \in V : \alpha(a,v) = b$$

Zamiast $\alpha(a,v)$ piszemy $a+v$ jeśli $a+v=b$ piszemy $v = b-a$

Przestrzeń afiniczna jest jak przestrzeń wektorowa bez zera. V nazywamy przestrzenią modelową dla V. O V mówi się także przestrzeń wektorów swobodnych. Przestrzeń fizyczna nierelatywistyczna jest przestrzenią afiniczną. Czasoprzestrzeń szczególnej teorii względności jest p. afiniczną. Czasoprzestrzeń newtonowska jest p. afiniczną.

(2)

Wybranie punktu w przestrzeni afinicznej jest równoważne z ustanowieniem bijekcji $V \longrightarrow A \quad v \longmapsto a_0 + v$. Mając bazę w V możemy wprowadzić układ współrzędnych w A

$e = (e_1, \dots, e_n)$ w V

$$\phi : A \longrightarrow \mathbb{R}^n \quad : \quad \phi(a) = \left(\varphi^1(a), \dots, \varphi^n(a)\right)$$

takie że

$$a = a_0 + \varphi^1(a)e_1 + \dots + \varphi^n(a)e_n$$

Z własności α („$+$") wynika, że ϕ jest bijekcją. Taki układ współrzędnych nazwalibyśmy afinicznym lub prostoliniowym.