



KAZIMIERZ KURATOWSKI 1886-1980

1.

"Pojęcie zbioru należy do najbardziej podstawowych i najczęściej stosowanych pojęć matematycznych"

Fragment matematyki dotyczący zbiorów i ich własności jest nazywany Teorią Mnogości. Wykład w tym semestrze zdamy, jak zwykle, od pewnych elementów teorii mnogości. Zaczniemy od samego pojęcia **zbioru**. Pojęcie to uważa się za pierwotne, tzn. nie definiuje się go. Podobnie, uważa się, że wystarczy wiedzieć co to znaczy że x jest elementem zbioru A ($x \in A$). Okazuje się jednak, że sprawy "być lub nie być zbiorem" nie można całkowicie zostawić bez komentarza. Żeby uzasadnić konieczność sformułowania pewnych zasad rządzących teorią mnogości przeprowadzimy pewne rozumowanie. Do tego trzeba się jednak przygotować:

DEFINICJA: Niech X i Y będą zbiorami. **Iloczynem kartezjańskim** zbiorów X i Y nazywamy zbiór wszystkich par (x, y) takich, że $x \in X$, $y \in Y$. Piszemy:

$$X \times Y = \{(x, y) : x \in X \text{ i } y \in Y\}$$

DEFINICJA: **Relację** między zbiorami X i Y nazywamy podzbiór iloczynu kartezjańskiego $X \times Y$. Piszemy $R \subset X \times Y$

Relacja jest pojęciem bardzo ogólnym. Przyjrzyjmy się zatem przykładom i zobaczymy jak to pojęcie działa.

Niech X będzie zbiorem psów przebywających na terenie ławki, a Y zbiorem ludzi przebywających na terenie ławki. Mówimy, że pies $x \in X$ jest w relacji R z człowiekiem $y \in Y$ wtedy i tylko wtedy gdy y jest właścicielem x . To jest przykład bardzo ogólnej relacji.

Pisać będziemy $(x, y) \in R$ lub $x R y$. Dlaczego mówię, że ta relacja jest ogólna? Bo można znaleźć bardzo różne sytuacje. Na przykład są psy bez właściciela, czyli takie x dla których $\forall y (x, y) \notin R$. Są psy mające jednego bądź więcej właścicieli, czyli x może być w relacji z jednym tylko y albo z wieloma. Podobnie jest z ludźmi: mając jednego bądź więcej psów, albo wcale.

Wśród wszystkich relacji wygodnie jest wyróżnić pewne relacje, na przykład

DEFINICJA: **Odwzorowaniem** z X do Y nazywamy taką relację F , $F \subset X \times Y$, że dla każdego $x \in X$ istnieje dokładnie jedno $y \in Y$ takie, że $x F y$

można też napisać $\forall x \in X \exists! y \in Y : (x, y) \in F$

2.

W takim przypadku używamy innej notacji. Zamiast $(x, y) \in F$ lub $x F y$ napiszemy $y = F(x)$, a samą relację F będziemy przedstawiać

$F: X \longrightarrow Y$ Zbiór X nazwiemy **dziedzina** F a Y **przeobrażenie**.

$x \mapsto F(x)$ Warto wyróżnić także zbiór tych $y \in Y$ dla których istnieje x takie, że $y = F(x)$. Ten zbiór to **$\text{im}(F)$**

czyli obraz odwzorowania. Skoro już przy tym jesteśmy, to przedstawiemy sposób zapisywania:

$$\text{im } F = \{ y \in Y : \exists x \ y = F(x) \} \quad \text{obraz } F$$

$$F(A) = \{ y \in Y : \exists x \in A \ y = F(x) \} \quad A \subset X$$

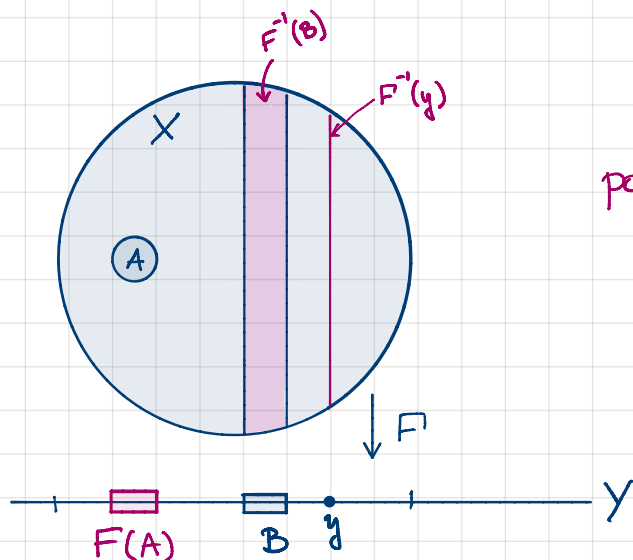
↑
obraz A względem F

$$F^{-1}(B) = \{ x \in X : F(x) \in B \}$$

przeciwwobraz B względem F

$$F^{-1}(y) = \{ x \in X : F(x) = y \}$$

↑
poziomica wartości y



Wśród wszystkich odwzorowań warto wyróżnić trzy typy (nie wyczerpujące wszystkich możliwości)

DEFINICJA: Odwzorowanie, którego obrazem jest cała przeobrażenie nazywamy **surjekcją**, lub mówimy, że odwzorowanie jest „na”. Odwzorowanie dla którego każda nietrywialna poziomicą jest jednopunktowa nazywamy **injekcją** lub mówimy, że jest **wzajemnie jednoznaczne**. Odwzorowanie które jest jednocześnie injekcją i surjekcją nazywamy **bijekcją**.

W dalszym ciągu ćwiczymy zapisywanie wypowiedzi matematycznych za pomocą symboli:

F jest surjekcją, tzn $\forall y \in Y \exists x \in X : F(x) = y$

F jest iniekcją, tzn $F(x_1) = F(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$

3.

Bijekcja jest to odwzorowanie, które łączy w pary elementy zbioru X i Y w taki sposób, że każdy y ma jeden x do pary i zadany y nie jest „samotny”.

PRZYKŁADY:

$f: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad (\xi, \eta) \mapsto \xi \eta^2$ jest surjekcją, istotnie: jeżeli

$\mathbb{R} \ni y > 0 \quad f(1, \sqrt{y}) = y$, dla $y < 0 \quad f(-1, \sqrt{|y|}) = y$, $f(0, 0) = 0$

$g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2, t \mapsto (\cos t, \sin t)$ nie jest surjekcją bo $\text{img} = \{(x, y) : x^2 + y^2 = 1\}$
jak widać $\text{img} \neq \mathbb{R}^2$

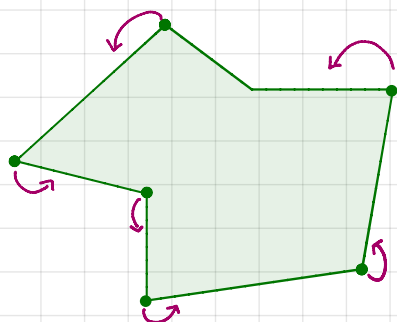
$h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2, n \mapsto (2n, n^2)$ jest iniekcją, istotnie: założmy, że $h(n_1) = h(n_2)$, tzn $(2n_1, n_1^2) = (2n_2, n_2^2)$. Oznacza to, że $n_1 = n_2$.

h nie jest surjekcją, bo druga współrzędna jest nieujemna. Łatwo także stwierdzić, że f i g nie są iniekcjami.

Odwzorowania mające własność iniektywności lub bijectywności przydają się do porównywania „wielkości” zbiorów w sensie liczby elementów bez definiowania pojęcia mocy zbioru. Dla zbiorów nieskończonych (cokolwiek to znaczy) pojęcie liczby elementów zbioru bywa kłopotliwe.

DEFINICJA Zbiory X i Y są **równoliczne** jeżeli istnieje bijekcja ze zbioru X do zbioru Y .

Np. zbiór wierzchołków wielokąta jest równoliczny ze zbiorem jego boków



Zdają się też interesujące sytuacje:
Zbiór naturalnych liczb parzystych jest równoliczny ze zbiorem liczb naturalnych:

2	4	6	8	10	12	14	16	...
↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	
1	2	3	4	5	6	7	8	...

$$\mathbb{N} \ni n \mapsto 2n \in 2\mathbb{N} \quad (2\mathbb{N} \subset \mathbb{N})$$

Istnieją jeszcze ciekawsze przypadki: okazuje się, że liczby naturalne $\mathbb{N}$ są równoliczne z liczbami wymiernymi $\mathbb{Q}$.

	1	2	3	4	5	...
1	¹ 1	² $\frac{1}{2}$	⁵ $\frac{1}{3}$	⁶ $\frac{1}{4}$	¹¹ $\frac{1}{5}$	...
2	³ 2	$\frac{2}{2}$	⁷ $\frac{2}{3}$	$\frac{2}{4}$	$\frac{2}{5}$	
3	⁴ 3	⁸ $\frac{3}{2}$	$\frac{3}{3}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{3}{5}$	
4	⁹ 4	$\frac{4}{2}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{4}{4}$	$\frac{4}{5}$	
5	¹⁰ 5	$\frac{5}{2}$	$\frac{5}{3}$	$\frac{5}{4}$	$\frac{5}{5}$	
...						

$$1 \mapsto 1$$

$$2 \mapsto \frac{1}{2}$$

$$3 \mapsto 2$$

$$4 \mapsto 3$$

$$5 \mapsto \frac{1}{3}$$

$$6 \mapsto \frac{1}{4}$$

$$7 \mapsto \frac{2}{3}$$

Powiemy, że zbiór X jest liczniejszy od zbioru Y jeśli istnieje iniekcja $Y \rightarrow X$ i X, Y nie są równoliczne. Rozważmy na przykład zbiór A i zbiór 2^A podzbiorów zbioru A .

$$A = \{1, 2, 3\} \quad 2^A = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\}$$

$$\#A = 3 \quad \#2^A = 2^3 = 8$$

Twierdzenie (Georg Cantor) Zbiór 2^A jest liczniejszy niż A .

Dowód: łatwo wskazać iniekcję $A \rightarrow 2^A : x \mapsto \{x\}$. Trudniej stwierdzić, że A i 2^A nie są równoliczne. Dowód przeprowadzimy metodą **ad absurdum** czyli przez sprawdzenie do sprzeczności: Załóżmy, że istnieje bijekcja $\psi: A \rightarrow 2^A$. Przy pomocy tej bijekcji możemy zdefiniować pewien podzbiór zbioru A :

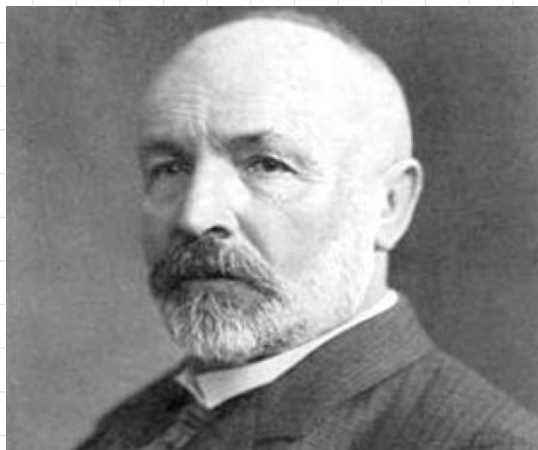
$$X = \{a \in A : a \notin \psi(a)\} \quad X \subset A \text{ tzn } X \in 2^A$$

Oznaczmy teraz przez x element zbioru A , który przechodzi na X przy odwzorowaniu ψ , tzn $\psi(x) = X$. Ponieważ ψ jest bijekcją, wiadomo, że taki element x istnieje i jest tylko jeden. Można teraz zadać pytanie czy element x należy do zbioru X ? Rozważmy dwie możliwości

(1) Jeśli $x \in X$ to znaczy że x spełnia warunek $x \in \psi(x) = X$ zatem dostaliśmy sprzeczność: $x \in X \Rightarrow x \notin X$

(2) Jeśli $x \notin X$ to znaczy, że x nie spełnia warunku definiującego X czyli $x \in \psi(x) = X$. Znowu otrzymaliśmy sprzeczność $x \notin X \Rightarrow x \in X$.

Więcej możliwości nie ma: dowodzi się więc, że założenie o istnieniu ψ prowadzi do sprzeczności. ■



GEORG CANTOR 1845-1918

Teraz możemy powrócić do problemów z teorią mnogości. Zastanówmy się nad zbiorem wszystkich zbiorów, oznaczmy go Z . Jeśli Z jest zbiorem, to 2^Z powinien być od niego liczniejszy. Z drugiej strony 2^Z jest zbiorem zbiorów, zatem $2^Z \subset Z$. W takim przypadku 2^Z może być co najwyżej równoliczny z Z . To rozumowanie prowadzi do sprzeczności zwanej **paradoksem Cantora**. Paradoks Cantora pokazuje, że w sprawie zbiorów potrzebne są jakieś zasady, żebyśmy nieustannie nie popadali w sprzeczność. Takie zasady zostały sformułowane i nazywane są pod nazwą **aksjomatyki Zermelo-Frenkla**.

Wymienimy kilka aksjomatów, żeby zobaczyć „z czym to się je”:

- ① **AKSJOMAT EKSTENSYJALNOŚCI** $\forall A \forall B (\forall x (x \in A \Leftrightarrow x \in B) \Rightarrow A = B)$
zbiory, które mają identyczne elementy są równe.
- ② **ISTNIENIE ZBIORU PUSTEGO** $\exists X: \forall y \sim (y \in X)$
- ③ **ISTNIENIE PODZBIORÓW**: Niech φ będzie formułą zdaniową nie zawierającą B w swojej definicji, wtedy $\forall A \exists B \quad x \in B \Leftrightarrow x \in A \wedge \varphi(x)$
- ④ **AKSJOMAT SUMY**: $\forall R \exists X (x \in X) \Leftrightarrow (\exists r \quad r \in R \wedge x \in r)$ w tym aksjomacie R jest zbiorem zbiorów a X sumą wszystkich zbiorów należących do R .
- ⑤ **AKSJOMAT ZBIORU PODZBIORÓW** $\forall A \exists P: \forall x (x \in P) \Leftrightarrow (\forall y \quad y \in x \Rightarrow y \in A)$ A - zbiór, x - podzbiór A P - zbiór podzbiorów zbioru A . Określony $P = 2^A$

... Aksjomatów jest więcej, jednak nie będziemy wszystkich wymieniać. Zobaczmy że to w czym sformułowanie aksjomatów pomaga, na przykład jak ratuje nas przed paradoksem Cantora. Pomoże nam w tym aksjomat ③ istnienia podzbiorów. Na podstawie tego aksjomatu umiemy definiować podzbiory zadając pewne dodatkowe warunki za pomocą formuły zdaniowej:

$$A = \{x \in B : \varphi(x)\}$$

$\uparrow$ podzbiór $\uparrow$ „duży” zbiór B w swojej definicji $\leftarrow$ formuła zdaniowa φ nie zawiera

Weźmy więc jako B hipotetyczny zbiór Z wszystkich zbiorów, a jako φ warunek $X \in X$, czyli X jest swoim elementem. Definicja A wygląda więc tak:

$$A = \{X \in Z : X \notin X\}$$

Jeśli wszystko jest o.k. to A jest zbiorem, zatem można dla niego sprawdzić prawdziwość formuły zdaniowej φ . Czy zatem $A \in A$? Jeśli tak (tzn A nie spełnia φ) to wtedy $A \notin A$ na mocy definicji zbioru A . Jeśli zaś $A \notin A$, to znaczy spełnia φ , to $A \in A$ znów na mocy definicji zbioru A . W obu przypadkach dostajemy sprzeczność. Jedyne co może być ale w tym rozumowaniu to założenie o istnieniu zbiora wszystkich zbiorów.

Nycciejsze po teorii mnogości zakończymy na omówieniu dwóch kwestii: Po pierwszą aksjomatykę ZF (Zermelo, Fraenkel) uzupełnia się zazwyczaj o **AKSJOMAT WYBORU** albo **PEWNIK WYBORU**. Głosi on, że dla każdej rodziny zbiorów $(X_\alpha)_{\alpha \in A}$ ^{zbiór parametrów} $\alpha \in A$ istnieje zbiór S zawierający po jednym elemencie z każdego X_α .
 Element rodziny zbiorów parametr

$$\exists S: \forall \alpha \in A \quad \#(S \cap X_\alpha) = 1$$

Okazuje się, że to jest szczególny aksjomat: miałowicie można uprawiać całkiem sensowną matematykę bez tego aksjomatu. Pewnych twierdzeń nie da się udowodnić, ale w zasadzie większość działań. Zazwyczaj jednak przyjmujemy ten aksjomat i wtedy mówimy że używamy aksjomatyki ZFC (Zermelo, Fraenkel, Choice).



ERNST ZERMELO
1871 - 1953



ABRAHAM
FRAENKEL
1891 - 1965



Ostatnia sprawa to kwestia mocy zbioru. Na ten temat powiemy tylko kilka słów:

DEFINICJA: Zbiór nazywamy **nieskończonym** jeśli jest równoliczny ze swoim właściwym podzbiorem.

Zauważyliśmy już że zbiór liczb naturalnych $\mathbb{N}$ jest równoliczny ze zbiorem liczb parzystych. Zatem $\mathbb{N}$ jest

nieskończony. Podobnie rzecz ma się z $\mathbb{R}$: Funkcja

$$\tan:]-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}[\ni x \mapsto \tan x \in \mathbb{R}$$

dostarcza bijekcji między $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\subset \mathbb{R}$ a $\mathbb{R}$.

DEFINICJA: Zbiór, który nie jest nieskończony nazywamy skończonym.

Twierdzenie Cantora dostarcza całego mnóstwa nieskończoności: możemy zacząć od $\# \mathbb{N}$ a dalej rozważać $2^{\mathbb{N}}$, $2^{2^{\mathbb{N}}}$...
Okazuje się także, że $\# 2^{\mathbb{N}} = \# \mathbb{R}$.