WYKŁAD 9

RACHUNEK RÓŻNICZKOWY

Pracujemy z funkcjami $f: X \to \mathbb{R}$ gdzie $X \subset \mathbb{R}$. Zazwyczaj X jest przedziałem.

GRANICA FUNKCJI W PUNKCIE

DEFINICJA: Niech I będzie przedziałem, x_0 punktem skupienia I, $f: I \to \mathbb{R}$. Mówimy, że f ma granicę g w x_0 jeśli spełniony jest warunek

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta : \ \forall x \in (]x_0-\delta, x_0+\delta[\cap I) \setminus \{x_0\} \quad |f(x)-g| < \varepsilon$$

Jeśli $x_0 \in \mathrm{Int}(I)$ piszemy $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = g$, jeśli $x_0 = \inf I$ piszemy $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = g$, jeśli $x_0 = \sup I$ piszemy $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = g$

Mówimy, że f ma w x_0 granicę równą $+\infty$ $(-\infty)$ jeśli zachodzi

$$\forall M \in \mathbb{R} \ \exists \delta > 0 : \ \forall x \in (]x_0-\delta, x_0+\delta[\cap I \setminus \{x_0\}) \quad f(x) > M \ (\text{dla } +\infty) \nearrow \lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty$$

$$f(x) < M \ (\text{dla } -\infty) \to \lim_{x \to x_0} f(x) = -\infty$$

$I =]a, +\infty[, [a, \infty[, \mathbb{R}$

rozważamy granicę w $+\infty$

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists R \in I : \ x > R \Rightarrow |f(x)-g| < \varepsilon$$

$I =]-\infty, a[,]-\infty, a], \mathbb{R}$

rozważamy granicę w $-\infty$

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists R \in I : \ x < R \Rightarrow |f(x)-g| < \varepsilon$$

Przypadek $g = \pm\infty$ z całą pewnością potrafią Państwo opisać samodzielnie.

POCHODNA FUNKCJI W PUNKCIE

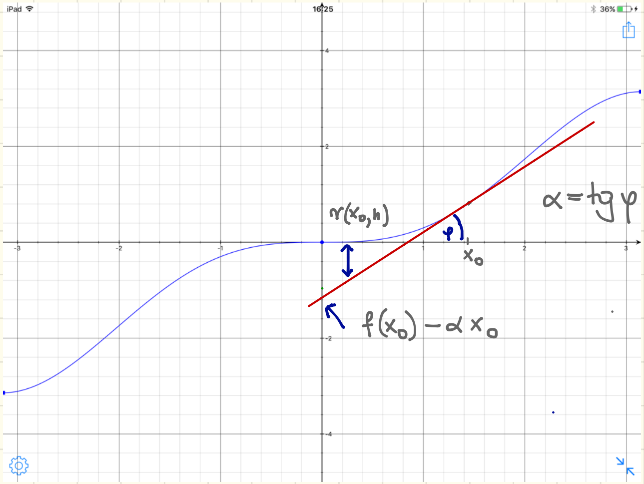
DEFINICJA: $f:]a,b[\longrightarrow \mathbb{R}$, $x_0 \in]a,b[$ Mówimy, że f jest różniczkowalna w x_0 jeśli istnieje $\alpha \in \mathbb{R}$ takie, że

$$f(x_0+h) = f(x_0) + \alpha \cdot h + r(x_0,h) \quad i \quad \lim_{h \to 0} \frac{r(x_0,h)}{h} = 0$$

α nazywamy pochodną f w punkcie x_0, $r(x_0,h)$ nazywamy resztą, $\alpha = f'(x_0)$

UWAGA: $x = x_0 + h$ $\quad h = x - x_0$

$$f(x) = f(x_0) + \alpha(x-x_0) + r(x_0+h) = \underbrace{\alpha x + (f(x_0) - \alpha x_0)}_{\text{funkcja „liniowa" tzn typu } x \mapsto ax+b} + r(x_0, x-x_0)$$



UWAGA: Mówimy, że $r(x_0,h)$ jest względem h małą rzędu wyższego niż 1

DEFINICJA $r:]-\varepsilon, \varepsilon[\longrightarrow \mathbb{R}$ jest małą rzędu wyższego niż k jeśli

$$\lim_{t \to 0} \frac{r(t)}{t^k} = 0$$

KILKA OBSERWACJI

(1) Funkcja różniczkowalna w x_0 jest ciągła w x_0: Ustalmy $\varepsilon>0$

$$\left|f(x_0+h)-f(x_0)\right| = \left|\alpha\cdot h + r(x_0,h)\right| = |h|\left|\alpha + \frac{r(x_0,h)}{h}\right| \underset{|h|<\delta_1}{<} |h|\cdot 2\cdot|\alpha| \underset{|h|<\varepsilon/2|\alpha|}{<} \varepsilon$$

Skoro $\frac{r(x_0,h)}{h} \to 0$ to biorąc małe h można to dowolnie zmniejszyć. Istnieje δ_1: $|h|<\delta_1 \Rightarrow \left|\frac{r(x_0,h)}{h}\right| < |\alpha|$. Wtedy $\left|\alpha + \frac{r(x_0,h)}{h}\right| < 2|\alpha|$.

Ostatecznie trzeba wziąć $|h| < \delta < \min\left\{\delta_1, \frac{\varepsilon}{2|\alpha|}\right\}$.

(2) Pochodna jest wyznaczona jednoznacznie: Niech α, α' spełniają definicję pochodnej

$$\begin{array}{rl} & f(x_0+h) = f(x_0) + \alpha h + r(x_0,h) \\ - & f(x_0+h) = f(x_0) + \alpha' h + r'(x_0,h) \\ \hline & 0 = (\alpha-\alpha')h + r(x_0,h) - r'(x_0,h) \end{array}$$

$$\alpha - \alpha' = \frac{1}{h}\left(r'(x_0,h) - r(x_0,h)\right)$$

$$\underbrace{|\alpha-\alpha'|}_{\text{równe } 0} = \frac{1}{|h|}\left|r'(x_0,h) - r(x_0,h)\right| \leqslant \underbrace{\left|\frac{r(x_0,h)}{h}\right| + \left|\frac{r'(x_0,h)}{h}\right|}_{\text{dowolnie małe}}$$

(3) f różniczkowalna w x_0 wtedy i tylko wtedy gdy istnieje $\lim\limits_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ ← iloraz różnicowy

$\Rightarrow$

$$\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = \frac{\cancel{f(x_0)} + \alpha h + r(x_0,h) - \cancel{f(x_0)}}{h} = \alpha + \frac{r(x_0,h)}{h} \xrightarrow{h\to 0} \alpha$$

$\Leftarrow$

Niech $\alpha = \lim\limits_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$. Weźmy $r(x_0,h) = f(x_0+h) - f(x_0) - \alpha h$

⇐ Niech $\alpha = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ weźmy $r(x_0,h) = f(x_0+h) - f(x_0) - \alpha h$

$\lim_{h\to 0} \frac{r(x_0,h)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} - \alpha = 0$ f jest więc różniczkowalna w x_0 z pochodną α.

(4) Jeśli $f: I \to \mathbb{R}$; $\forall x\in I$ f różniczkowalna w x to mówimy f różniczkowalna w I

przedział otwarty

i funkcję $x \longmapsto f'(x)$ nazywamy funkcją pochodną dla f lub pochodną f.

PRZYKŁADY :

(1) $f(x) = x^n$ $\quad (x+h)^n = x^n + n\cdot x^{n-1}\cdot h + \underbrace{\binom{n}{2} x^{n-2} h^2 + \cdots + \binom{n}{n-1} x h^{n-1} + h^n}_{r(x,h)}$

$\frac{r(x,h)}{h} = \binom{n}{2} x^{n-2} h + \cdots + h^{n-1} \xrightarrow[h\to 0]{} 0$ $\qquad f'(x) = nx^{n-1}$

(2) $g(x) = \sin(x)$ $\quad \sin(x+h) = \sin x \cosh + \cos x \sin h = \sin x + \sin x(\cos h - 1) + \cos x\cdot h + \cos x(\sin h - h) =$

$= \sin x + \cos x\cdot h + \underbrace{\sin x(\cos h - 1) + \cos x(\sin h - h)}_{r(x,h)}$

$\frac{r(x,h)}{h} = \sin x \frac{\cos h - 1}{h} + \cos x\left(\frac{\sin h}{h} - 1\right)$ $\qquad g'(x) = \cos x$

$\frac{\cos h - 1}{h} \xrightarrow[h\to 0]{} 0$, $\quad \frac{\sin h}{h} \xrightarrow[h\to 0]{} 1$ obie granice da się zrobić geometrycznie.

PODSTAWOWE PRAWA RÓZNICZKOWANIA

(1) $f,g:]a,b[\longrightarrow \mathbb{R}$ $\quad x \in]a,b[$ $\quad f,g$ różniczkowalne w x, $\lambda \in \mathbb{R}$: $\underset{\text{oczywiste}}{\lambda f}$, $\underset{\text{oczywiste}}{f+g}$, fg różniczkowalne w x

$$\frac{1}{h}\left[(fg)(x+h)-(fg)(x)\right]=\frac{1}{h}\left[f(x+h)g(x+h)-f(x+h)g(x)+f(x+h)g(x)-f(x)g(x)\right]=$$

$$=\underset{\downarrow\ f(x)}{f(x+h)}\underset{\downarrow\ g'(x)}{\frac{1}{h}\left[g(x+h)-g(x)\right]}+\underset{\downarrow\ f'(x)}{\frac{1}{h}\left[f(x+h)-f(x)\right]}g(x)\longrightarrow f(x)g'(x)+f'(x)g(x)$$

$$(fg)'(x)=f(x)g'(x)+f'(x)g(x)$$

REGUŁA LEIBNIZA

(2) $f: I \longrightarrow \mathbb{R}$, $g: J \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \in I$, $f(x) \in J$, $f'(x)$, $g'(f(x))$ istnieją: wtedy $g \circ f$ różniczkowalne w x i $(g\circ f)'(x) = g'(f(x))\cdot f'(x)$

REGUŁA ŁAŃCUCHOWA

$$\frac{1}{h}\left[(g\circ f)(x+h)-(g\circ f)(x)\right]=\frac{1}{h}\left[g\big(f(x+h)\big)-g\big(f(x)\big)\right]=\frac{1}{h}\left[g\big(f(x)+\overbrace{f'(x)h+r_f(x,h)}^{k}\big)-g(f(x))\right]=$$

$$\frac{1}{h}\left[g(f(x))+g'(f(x))\left\{f'(x)\cdot h+r_f(x,h)\right\}+r_g(f(x),k)-g(f(x))\right]$$

$$\frac{1}{h}\left[(g\circ f)(x+h)-(g\circ f)(x)\right]=\frac{1}{h}\left[g\left(f(x+h)\right)-g\left(f(x)\right)\right]=\frac{1}{h}\left[g\Big(f(x)+\overbrace{f'(x)h+r_f(x,h)}^{k}\Big)-g(f(x))\right]=$$

$$\frac{1}{h}\left[\cancel{g(f(x))}+g'(f(x))\left\{f'(x)\cdot h+r_f(x,h)\right\}+r_g(f(x),k)-\cancel{g(f(x))}\right]=$$

$$\frac{1}{h}\left[g'(f(x))f'(x)h+g'(f(x))r_f(x,h)+r_g(f(x),k)\right]=g'(f(x))f'(x)+g'(f(x))\frac{r_f(x,h)}{h}+\frac{r_g(f(x),k)}{h}$$

to co trzeba

$\frac{r_f(x,h)}{h}\xrightarrow{h\to 0}0$

?

$$\frac{r_g(f(x),k)}{k}\cdot\frac{k}{h}=\frac{r_g(f(x),k)}{k}\left\{\frac{f'(x)h+r_f(x,h)}{h}\right\}=\frac{r_g(f(x),k)}{k}\left\{f'(x)+\frac{r_f(x,h)}{h}\right\}\xrightarrow{h\to 0}0$$

gdy $h\to 0$ także $k\to 0$

$\frac{r_g(f(x),k)}{k}\xrightarrow{h\to 0}0$, $\quad f'(x)\xrightarrow{h\to 0}f'(x)$, $\quad \frac{r_f(x,h)}{h}\xrightarrow{h\to 0}0$

(3) $\mathbb{R}\setminus\{0\}\ni x\longmapsto\frac{1}{x}$

$$\frac{1}{h}\left(\frac{1}{x+h}-\frac{1}{x}\right)=\frac{1}{h}\left(\frac{x-x-h}{x(x+h)}\right)=-\frac{1}{x(x+h)}\xrightarrow{h\to 0}-\frac{1}{x^2}$$

$$\left(\frac{1}{x}\right)'=-\frac{1}{x^2}$$

(4) $f: I\to\mathbb{R}$ $x\in I$ $f'(x)$ istnieje, $f(x)\neq 0$. Wtedy $\left(\frac{1}{f(x)}\right)'=-\frac{1}{f^2(x)}f'(x)$

$x\longmapsto\frac{1}{f(x)}$ jest złożeniem f z $x\longmapsto\frac{1}{x}$

(6) $f, g : I \to \mathbb{R}$, $x \in I$, $f'(x), g'(x)$ istnieją, $f(x) \neq 0$ wtedy

$$\left(\frac{g(x)}{f(x)}\right)' = \frac{g'(x)f(x) - g(x)f'(x)}{(f(x))^2}$$

$$\left(\frac{g(x)}{f(x)}\right)' = \left(g(x) \cdot \frac{1}{f(x)}\right)' = g'(x) \cdot \frac{1}{f(x)} + g(x) \cdot \left(\frac{1}{f(x)}\right)' = g'(x) \cdot \frac{1}{f(x)} + g(x)\left(-\frac{1}{[f(x)]^2} f'(x)\right) = \frac{g'(x)f(x) - g(x)f'(x)}{[f'(x)]^2}$$

DEFINICJA: $f : X \to \mathbb{R}$ $x_0 \in X$. Mówimy, że f ma w x_0 maksimum/minimum lokalne jeśli istnieje $\varepsilon > 0$ taki że

przestrzeń metryczna

$$\forall y \in K(x_0, \varepsilon) \quad f(y) \leq f(x_0) \quad \text{maksimum}$$

$$f(y) \geq f(x_0) \quad \text{minimum}$$

ekstremum lokalne jest to lokalne maksimum lub minimum.

SERIA POTRZEBNYCH TWIERDZEŃ

STWIERDZENIE Jeśli funkcja rzeczywista ma w x ekstremum i jest w x różniczkowalna, to $f'(x)=0$

DOWÓD dla minimum

Niech ε będzie jak w df. *minimum*, tzn dla $y \in]x-\varepsilon, x+\varepsilon[$ $f(y) \leqslant f(x)$

dla $0<h<\varepsilon$ $\quad \dfrac{f(x+h)-f(x)}{h} \geqslant 0 \longrightarrow f'(x) = \lim\limits_{h\to 0^+} \dfrac{f(x+h)-f(x)}{h} \geqslant 0$

dla $-\varepsilon<h<0$ $\quad \dfrac{f(x+h)-f(x)}{h} \leqslant 0 \longrightarrow f'(x) = \lim\limits_{h\to 0^-} \dfrac{f(x+h)-f(x)}{h} \leqslant 0$

$\Rightarrow f'(x)=0$ ∎

TWIERDZENIE ROLLE'A Jeśli f jest ciągła na $[a,b]$ i różniczkowalna na $]a,b[$ oraz $f(a)=f(b)$ to istnieje $x \in]a,b[$ taki, że $f'(x)=0$

DOWÓD

Jeśli f jest stała na $[a,b]$ to $f'(x)=0$ dla wszystkich $x \in]a,b[$. Jeśli f nie jest stała to istnieje $c \in]a,b[$ taki, że $f(c) \neq f(a)=f(b)$. Załóżmy że $f(c)>f(a)$.

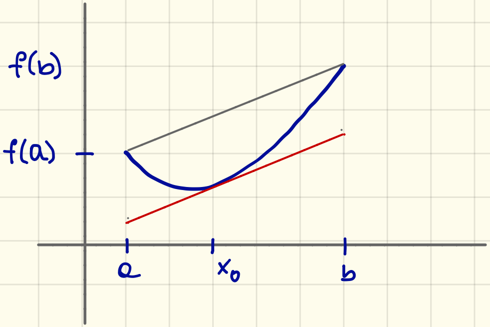
Istnieje $x_0 \in]a,b[:$ $f(x_0)=\sup f([a,b])$ (f ciągła na zbiorze zwartym...)
Wiadomo że $f(x_0) \geqslant f(c) > f(a)=f(b)$. Z poprzedniego stwierdzenia $f'(x_0)=0$

Jeśli $f(c)<f(a)$ używamy y_0: $f(y_0)=\inf f([a,b])$ ∎

TWIERDZENIE LAGRANGE'A (ALBO O WARTOŚCI ŚREDNIEJ)

f ciągła na $[a,b]$, różniczkowalna w $]a,b[$. Istnieje $x \in]a,b[$ taki, że

$$f'(x)(b-a) = f(b) - f(a)$$



Równanie szarej prostej

$$g(x) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a) + f(a)$$

Funkcja $x \overset{\varphi}{\longmapsto} f(x)-g(x)$ spełnia założenia tw. Rolle'a $\varphi(a) = \varphi(b) = 0$. Istnieje $x_0 \in]a,b[$ takie, że $\varphi'(x_0) = 0$

$$\varphi'(x) = f'(x) - g'(x) = f'(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \Rightarrow f'(x_0) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \quad \blacksquare$$

Jeśli z Warszawy do Łodzi przejechałeś z prędkością średnią $100\,km/h$ to znaczy, że w przynajmniej jednej chwili czasu jechałeś z prędkością $100\,km/h$.

WNIOSKI Z TWIERDZENIA LAGRANGE'A

f różniczkowalna w $]a,b[$

(1) $\forall x \in]a,b[\quad f'(x) > 0 \implies f$ rosnąca na $]a,b[$

(2) $\forall x \in]a,b[\quad f'(x) < 0 \implies f$ malejąca na $]a,b[$

(3) $\forall x \in]a,b[\quad f'(x) = 0 \implies f$ stała na $]a,b[$

DOWÓD:

Weźmy dowolne x_1, x_2 takie, że $a < x_1 < x_2 < b$ istnieje $x \in]x_1, x_2[$ takie, że $f'(x)(x_2 - x_1) = f(x_2) - f(x_1)$

$(x_2 - x_1) > 0$ zatem $f(x_2) - f(x_1)$ ma znak jak $f'(x)$, stąd (1),(2),(3). ■

JESZCZE JEDEN WNIOSEK

f różniczkowalna na $]a,b[\setminus \{x_0\}$

jeśli $f'(x) > 0$ dla $x \in]a, x_0[$ i $f'(x) < 0$ dla $x \in]x_0, b[$ to f ma w x_0 maksimum

jeśli $f'(x) < 0$ dla $x \in]a, x_0[$ i $f'(x) > 0$ dla $x \in]x_0, b[$ to f ma w x_0 minimum

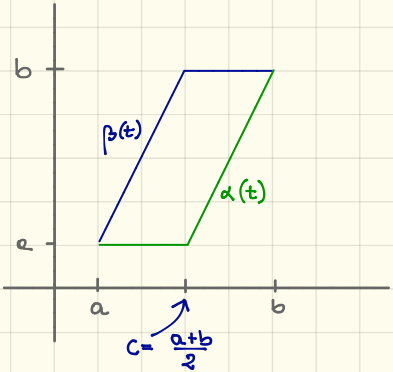
dowód oczywisty.

WŁASNOŚĆ DARBOUX DLA POCHODNYCH

$f: I \to \mathbb{R}$ różniczkowalna

$[a,b] \subset I$ Dla dowolnego y pomiędzy $f'(a)$ i $f'(b)$ istnieje $x \in\,]a,b[$ taki że $f'(x) = y$

DOWÓD:



$$\alpha(t) = \begin{cases} a & t \in [a,c] \\ 2t-b & t \in\,]c,b] \end{cases}$$

$$\beta(t) = \begin{cases} 2t-a & t \in [a,c] \\ b & t \in\,]c,b] \end{cases}$$

α, β są ciągłe na $[a,b]$ $\quad a \leq \alpha(t) < \beta(t) \leq b$ na $]a,b[$

$$g(t) := \frac{f(\beta(t)) - f(\alpha(t))}{\beta(t) - \alpha(t)}$$ g ciągła na $]a,b[$

$$\lim_{t \to a^+} g(t) = \lim_{t \to a^+} \frac{f(2t-a) - f(a)}{2t-a-a} = \lim_{t \to a^+} \frac{f(a + 2(t-a)) - f(a)}{2(t-a)} = f'(a)$$

$$\lim_{t \to b^-} g(t) = \lim_{t \to b^-} \frac{f(b) - f(2t-b)}{b-2t+b} = \lim_{t \to b^-} \frac{f(b + 2(t-b)) - f(b)}{2(b-t)} = f'(b)$$

$$g(t) := \frac{f(\beta(t)) - f(\alpha(t))}{\beta(t) - \alpha(t)} \quad \text{dla } t \in]a,b[\quad g(a) = f'(a) \quad g(b) = f'(b)$$

g jest ciągła na $[a,b]$ więc przyjmuje każdą wartość między $f'(a)$ i $f'(b)$

Niech $t_0 \in]a,b[\,:\, g(t_0) = y$

$$\alpha(t_0) = x_1 < x_2 = \beta(t_0) \qquad a \leq x_1 < x_2 \leq b$$

f spełnia założenia tw. Lagrange'a na $[x_1, x_2]$

Niech x : $f'(x)(x_2 - x_1) = f(x_2) - f(x_1)$

$$f'(x) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{f(\beta(t_0)) - f(\alpha(t_0))}{\beta(t_0) - \alpha(t_0)} = g(t_0) = y \qquad \blacksquare$$

PRZYKŁAD:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

różniczkowalna

$$f'(x) = \begin{cases} 2x \sin\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

pochodna nieciągła

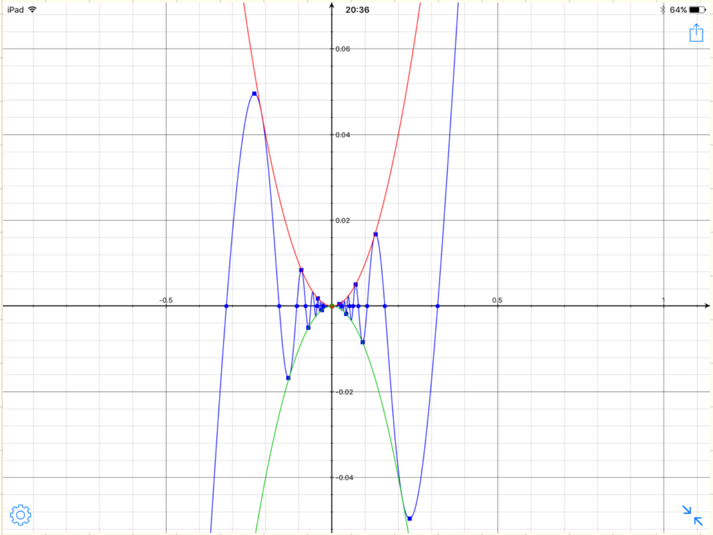
PRZYKŁAD:

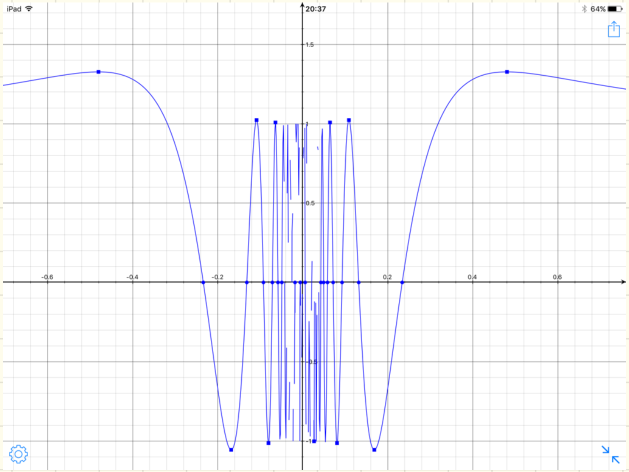
$$f(x)=\begin{cases} x^2\sin\left(\frac{1}{x}\right) & x\neq 0 \\ 0 & x=0 \end{cases}$$

różniczkowalna

$$f'(x)=\begin{cases} 2x\sin\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x} & x\neq 0 \\ 0 & x=0 \end{cases}$$

pochodna nieciągła





TWIERDZENIE $f, g : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ ciągłe i różniczkowalne w $]a,b[$. Istnieje $x_0 \in]a,b[$ taki, że

$$[f(b)-f(a)]\,g'(x_0) = [g(b)-g(a)]\,f'(x_0)$$

DOWÓD:

$$\varphi(x) = [f(b)-f(a)]\,g(x) - [g(b)-g(a)]\,f(x)$$

ciągłe na $[a,b]$, różniczkowalne w $]a,b[$

$$\varphi(a) = [f(b)-f(a)]\,g(a) - [g(b)-g(a)]\,f(a) = f(b)g(a) - f(a)g(a) - g(b)f(a) + g(a)f(a) =$$

$$= f(b)g(a) - g(b)f(a)$$

$$\varphi(b) = [f(b)-f(a)]\,g(b) - [g(b)-g(a)]\,f(b) = f(b)g(b) - f(a)g(b) - g(b)f(b) + g(a)f(b) =$$

$$= -f(a)g(b) + g(b)f(a)$$

φ spełnia warunki twierdzenia Rolle'a na $[a,b]$.

$$x_0 : \varphi'(x_0) = 0 = [f(b)-f(a)]\,g'(x_0) - [g(b)-g(a)]\,f'(x_0) \Rightarrow [f(b)-f(a)]\,g'(x_0) = [g(b)-g(a)]\,f'(x_0) \quad \blacksquare$$

STWIERDZENIE $f: I \to \mathbb{R}$ różniczkowalna, $x_0 \in I$: $f'(x_0) > 0$
Wtedy $\exists\, \delta > 0$ taka, że dla $0 < h < \delta$ $f(x_0+h) > f(x_0)$, $f(x_0-h) < f(x_0)$

DOWÓD

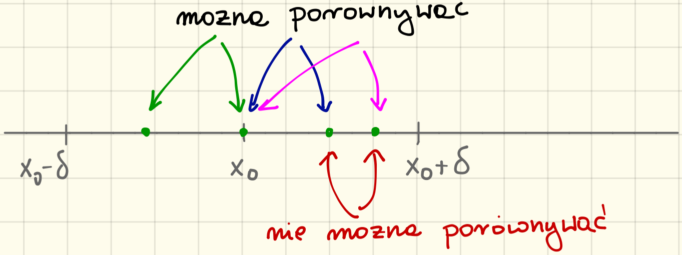
$$f(x_0+h) = f(x_0) + f(x_0)'h + r(x_0,h)$$

$$f(x_0+h) - f(x_0) = h\left(f'(x_0) + \frac{r(x_0,h)}{h}\right)$$

Z różniczkowalności f wynika, że istnieje $\delta > 0$ taka, że $\left|\frac{r(x_0,h)}{h}\right| < f'(x_0)$. Wtedy $\left(f'(x_0) + \frac{r(x_0,h)}{h}\right) > 0$. Znak $h\left(f'(x_0) + \frac{r(x_0,h)}{h}\right)$ zależy od znaku h.

Zatem znak $f(x_0+h) - f(x_0)$ zależy od znaku h ∎

UWAGA



$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}x + x^2\sin^2\frac{1}{x} & x\neq 0\\ 0 & x=0\end{cases}$$

$$f'(x)=\begin{cases}\frac{1}{2} + 2x\sin^2\frac{1}{x} - 2\sin\frac{1}{x}\cos\frac{1}{x} & x\neq 0\\ \frac{1}{2} & x=0\end{cases}$$