Reguła de l'Hospitala

Autorstwo twierdzenia o którym będzie mowa przypisuje się panu Gulliaume Francois Antoine markizowi de l'Hospital, który żył w latach 1661-1704.

Był on autorem pierwszego podręcznika rachunku różniczkowego zatytułowanego „Analyse des Infiniment Petites pour l'Inteligence des Ligues Courbes". W tym właśnie podręczniku opisana została metoda znajdowania granic funkcji znana obecnie jako reguła de l'Hospitala. Autorem twierdzenia jest jednak Johann Bernoulli (1667 - 1748)

Reguła de l'Hospitala dotyczy wyznaczania granic funkcji mających postać ilorazu funkcji różniczkowalnych typu $0/0$ lub ∞/∞.

PIERWSZA REGUŁA DE L'HOSPITALA DLA ODCINKA:

f, g różniczkowalne na $]a,b[$, $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = 0 = \lim\limits_{x\to a^+} g(x)$, $g'(x) \neq 0$ na $]a,b[$.

Jeśli istnieje granica $\lim\limits_{x\to a^+} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} =: L$ to

$$\lim_{x\to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = L \quad \text{dla} \quad L \in \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}.$$

DOWÓD. Funkcje f i g dookreślamy w $x=a$ kładąc wartość 0, tzn mamy

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x=a \\ f(x) & x\in]a,b[\end{cases} \qquad G(x) = \begin{cases} 0 & x=a \\ g(x) & x\in]a,b[\end{cases}$$

Biorąc dowolne $x \in]a,b[$ otrzymujemy na odcinku $[a,x]$ funkcje F i G spełniające typowe założenia, tzn ciągłe na domkniętym odcinku i różniczkowalne we wnętrzu odcinka. Możemy zatem skorzystać z twierdzenia Cauchy'ego Istnieje $\xi \in]a,x[$ takie, że

$$\underbrace{G'(\xi)}_{g'(\xi)}\,[\underbrace{F(x)}_{f(x)} - \underbrace{F(a)}_{0}] = \underbrace{F'(\xi)}_{f'(\xi)}\,[\underbrace{G(x)}_{g(x)} - \underbrace{G(a)}_{0}]$$

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$$

ponadto, ξ zależy od x w taki sposób, że gdy $x \to a^+$ to $\xi \to a^+$ gdyż $a < \xi < x$.

$$\lim_{x\to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a^+} \frac{f'(\xi(x))}{g'(\xi(x))} = \lim_{\xi\to a^+} \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = L \quad \blacksquare$$

PIERWSZA REGUŁA DE L'HOSPITALA DLA PÓŁPROSTEJ:

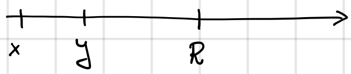
$f,g :]-\infty, c[\longrightarrow \mathbb{R}$ różniczkowalne, $\quad \lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0 = \lim\limits_{x\to-\infty} g(x) \quad g'(x) \neq 0$ dla $x \in]-\infty, c[$,

Jeżeli istnieje granica $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} =: L$ to $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = L$, $\quad L \in \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$

DOWÓD: Przeprowadzimy dowód dla skończonej liczby L:

$\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L$ oznacza, że dla dowolnego $\varepsilon > 0$ istnieje liczba $R \in \mathbb{R}$ taka, że dla $x < R$ zachodzi nierówność:

$$L - \varepsilon < \frac{f'(x)}{g'(x)} < L + \varepsilon \quad (*)$$



weźmy $x < y < R$. Na odcinku $[x,y]$ możemy skorzystać z twierdzenia Cauchy'ego dla znajdując $\xi \in]x,y[$ takie, że

$$\frac{f(y) - f(x)}{g(y) - g(x)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} \quad (**)$$

Wobec nierówności $(*)$ i równości $(**)$ zachodzi także

$$L - \varepsilon < \frac{f(y) - f(x)}{g(y) - g(x)} < L + \varepsilon$$

W powyższej granicy przechodzimy do $-\infty$ z x, otrzymując

$$L - \varepsilon \leqslant \frac{f(y)}{g(y)} \leqslant L + \varepsilon$$

Ostatnia nierówność zachodzi dla dowolnego $y < R$, co jest równoważne stwierdzeniu iż

$$\lim_{y\to-\infty} \frac{f(y)}{g(y)} = L \quad \blacksquare$$

PRZYKŁAD:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x - x\cos x}{\sin^3 x} \overset{H}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\cos x - \cos x + x\sin x}{3\sin^2 x \cos x} = \lim_{x\to 0} \frac{x \cancel{\sin x}}{3\sin^{\cancel{2}} x \cos x} = \lim_{x\to 0} \frac{\overset{\to 1}{x}}{3\sin x \cos x} = \frac{1}{3}$$

Symbol H nad znakiem równości oznacza, że stosujemy regułę de l'Hospitala. Nadaje on znakowi równości znaczenie warunkowe. Znak ten staje się prawdziwą równością dopiero gdy doliczymy zadanie do końca. W założeniach twierdzenia mamy bowiem warunek „jeśli $\lim\limits_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ istnieje". Zatem jeśli granica ilorazu pochodnych nie istnieje, to nie daje to żadnej wiedzy o granicy ilorazu funkcji.

PRZYKŁAD DEMOTYWUJĄCY:

$\sin 2x$

$$\lim_{x\to0}\left(\frac{1}{x^2}-\operatorname{ctg}^2x\right)=\lim_{x\to0}\frac{\sin^2x-x^2\cos^2x}{x^2\sin^2x}\overset{H}{=}\lim_{x\to0}\frac{2\sin x\cos x-2x\cos^2x+2x^2\cos x\sin x}{2x\sin^2x+2x^3\sin x\cos x}=$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{\sin2x-2x\cos^2x+x^2\sin2x}{2x\sin^2x+x^2\sin2x}\overset{H}{=}\lim_{x\to0}\frac{2\cos2x-2\cos^2x+4x\cos x\sin x+2x\sin2x+2x^2\cos2x}{2\sin^2x+4x\sin x\cos x+2x\sin2x+2x^2\cos2x}$$

$$\lim_{x\to0}\frac{2\cos2x-2\cos^2x+4x\sin2x+2x^2\cos2x}{2\sin^2x+4x\sin2x+2x^2\cos2x}\overset{H}{=}\lim_{x\to0}\frac{-4\sin2x+2\sin2x+4\sin2x+8x\cos2x+4x\cos2x-4x^2\sin}{2\sin2x+4\sin2x+8x\cos2x+4x\cos2x-4x^2\sin2x}$$

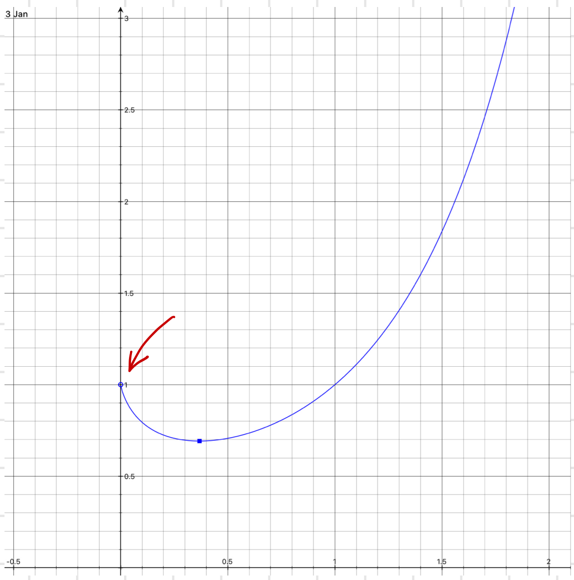
$$=\lim_{x\to0}\frac{2\sin2x+12x\cos2x+4x^2\sin2x}{6\sin2x+12x\cos2x-4x^2\sin2x}\overset{H}{=}\lim_{x\to0}\frac{4\cos2x+12\cos2x-24x\sin2x+8x\sin2x+8x^2\cos2x}{12\cos2x+12\cos2x-24x\sin2x-8x\sin2x-8x^2\cos2x}=$$

$=\frac{16}{24}=\frac{2}{3}$ zamiast 4 razy różniczkować, lepiej rozwinąć, tzn. użyć wzoru Taylora

PRZYKŁAD

$\lim_{x\to0^+}x^x=?$ $\quad x^x=e^{x\log x}$ $\quad \log x^x=x\log x$

$$\lim_{x\to0^+}x\log x=\lim_{x\to0^+}\frac{\log x}{\frac{1}{x}}\overset{H}{=}\lim_{x\to0^+}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to0^+}-\frac{x^2}{x}=0\Rightarrow\lim_{x\to0^+}x^x=\exp\left(\lim_{x\to0^+}x\log x\right)=1$$



DRUGA REGUŁA DE L'HOSPITALA DLA ODCINKA

Druga reguła de l'Hospitala dotyczy przypadku $\frac{\infty}{\infty}$

$f,g:\,]a,b[\,\to\mathbb{R}$ różniczkowalne, $g'(x)\neq0$ dla $x\in\,]a,b[$ $\lim_{x\to a^+}f(x)=\infty=\lim_{x\to a^+}g(x)$

Jeśli istnieje $\lim_{x\to a^+}\frac{f'(x)}{g'(x)}=:L$ to

$$\lim_{x\to a^+}\frac{f(x)}{g(x)}=L.$$

DOWÓD: Dowód przeprowadzimy dla $L\in\mathbb{R}$. Istnienie granicy ilorazu pochodnych oznacza, że dla dowolnego $\varepsilon>0$ istnieje $\delta>0$ taka, że dla $x\in\,]a,a+\delta[$ zachodzi

$L-\varepsilon<\frac{f'(x)}{g'(x)}<L+\varepsilon$. Podobnie jak poprzednio korzystamy z tw. Cauchy'ego dla $a<x<y<a+\delta$: dla pewnego $\xi\in\,]x,y[$ zachodzi $\frac{f(y)-f(x)}{g(y)-g(x)}=\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$. Możemy zatem skorzystać z nierówności $L-\varepsilon<\frac{f(y)-f(x)}{g(y)-g(x)}<L+\varepsilon$ dla $a<x<y<a+\delta$.

Przekształcamy tę nierówność:

$$L-\varepsilon < \frac{f(y)-f(x)}{g(y)-g(x)} < L+\varepsilon \quad \Big/ \cdot \frac{g(x)-g(y)}{g(x)}$$

to przez co mnożymy jest stałego znaku: istotnie, skoro $g'(x) \neq 0$ to $g'(x)$ jest stałego znaku. Musi to być „−" gdyż z warunek g monotoniczna i $g(x) \xrightarrow{x\to a^+} \infty$ oznacza g malejąca na $]a, a+\delta[$ (ew. zmniejszamy δ). Ostatecznie, licznik i mianownik są dodatnie.

$$(L-\varepsilon)\left(1-\frac{g(y)}{g(x)}\right) < \frac{f(x)-f(y)}{g(x)} < (L+\varepsilon)\left(1+\frac{g(y)}{g(x)}\right)$$

$$(L-\varepsilon)\left(1-\underbrace{\frac{g(y)}{g(x)}}_{\to 0}\right) + \underbrace{\frac{f(y)}{g(x)}}_{\to 0} < \frac{f(x)}{g(x)} < (L+\varepsilon)\left(1+\underbrace{\frac{g(y)}{g(x)}}_{\to 0}\right) + \underbrace{\frac{f(y)}{g(x)}}_{\to 0}$$

$$\downarrow x\to a^+$$

$$L-\varepsilon \leq \lim_{x\to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} \leq L+\varepsilon$$

Wobec dowolności ε mamy tezę ■

DRUGA REGUŁA DE L'HOSPITALA DLA PÓŁPROSTEJ

$f,g:]-\infty, c[\longrightarrow \mathbb{R}$ różniczkowalne, $f'(g) \neq 0$, $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \infty = \lim_{x\to-\infty} g(x)$

Jeśli $\lim_{x\to-\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} =: L$ to $\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{C(x)} = L$.

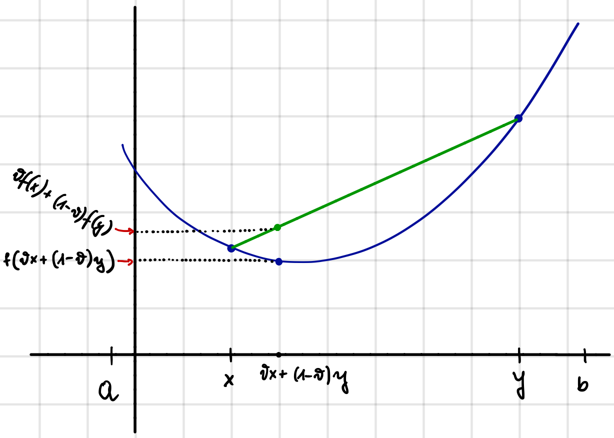
POZOSTAWIAMY BEZ DOWODU.

FUNKCJE WYPUKŁE:

Funkcję $f:]a,b[\longrightarrow \mathbb{R}$ nazywamy wypukłą jeśli dla dowolnych $x,y \in]a,b[$ i dowolnej liczby $\vartheta \in [0,1]$ zachodzi nierówność:

$$f(x\cdot\vartheta + y(1-\vartheta)) \leq f(x)\cdot\vartheta + f(y)(1-\vartheta)$$

(tzn. sieczna leży nad wykresem). Jeżeli spełniona jest nierówność w drugą stronę funkcję nazywamy wklęsłą.



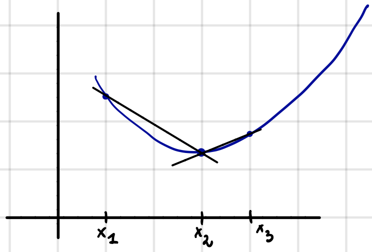
W czasie ćwiczeń dowodzona była, najprawdopodobniej metodą indukcji nierówność Jensena, która przyjmuje postać (dla funkcji wypukłej)

$x_1, \dots, x_n \in]a,b[$ $\quad \vartheta_1 \dots \vartheta_n \in [0,1]$, $\vartheta_1 + \dots + \vartheta_n = 1$

$$f\left(\sum_i \vartheta_i x_i\right) \leq \sum_i \vartheta_i f(x_i)$$

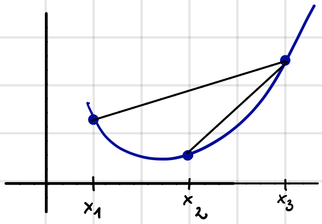
STWIERDZENIE: Funkcja f jest wypukła na $]a,b[$ wtedy i tylko wtedy, gdy dla dowolnych $x_1 < x_2 < x_3$, $x_i \in]a,b[$ spełniona jest nierówność

$$(1) \quad \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} \leq \frac{f(x_2)-f(x_3)}{x_2-x_3}$$



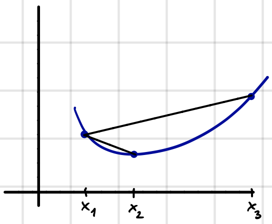
Podobnie, f jest wypukła wtedy i tylko wtedy, gdy

(2) $\frac{f(x_3)-f(x_1)}{x_3-x_1} \leq \frac{f(x_3)-f(x_2)}{x_3-x_2}$



oraz f jest wypukła wtedy i tylko wtedy, gdy

(3) $\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} \leq \frac{f(x_3)-f(x_1)}{x_3-x_1}$



DOWÓD Dowodzimy jednej tylko nierówności, pozostałych dowodzi się bardzo podobnie.
Jeśli $x_1 < x_2 < x_3$ to $x_2 = \vartheta x_1 + (1-\vartheta) x_3$ dla $\vartheta = \frac{x_3-x_2}{x_3-x_1}$ wtedy $1-\vartheta = \frac{x_2-x_1}{x_3-x_1}$
zapisujemy nierówność z definicji wypukłości

$$f(\vartheta x_1 + (1-\vartheta)x_3) \leq \vartheta f(x_1) + (1-\vartheta) f(x_3)$$

$$f(x_2) \leq \frac{x_3-x_2}{x_3-x_1} f(x_1) + \frac{x_2-x_1}{x_3-x_1} f(x_3)$$

$$0 \leq \frac{x_3-x_2}{x_3-x_1} f(x_1) + \frac{x_2-x_1}{x_3-x_1} f(x_3) - 1 \cdot f(x_2)$$

$$1 = \frac{x_3-x_2+x_2-x_1}{x_3-x_1}$$

$$0 \leq \frac{x_3-x_2}{x_3-x_1} \big(f(x_1)-f(x_2)\big) + \frac{x_2-x_1}{x_3-x_1} \big(f(x_3)-f(x_2)\big) \quad \Big/ \cdot (x_3-x_1)$$

$$0 \leq \big(f(x_1)-f(x_2)\big)(x_3-x_2) + \big(f(x_3)-f(x_2)\big)(x_2-x_1) \quad \Big/ : (x_2-x_1)(x_3-x_2)$$

$$0 \leq \frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_2-x_1} + \frac{f(x_3)-f(x_2)}{x_3-x_2}$$

$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} \leq \frac{f(x_3)-f(x_2)}{x_3-x_2}$$

nierówność (2)

Z powyższego stwierdzenia wynika istnienie jednostronnych pochodnych dla funkcji wypukłej na odcinku otwartym. Istotnie: rozważmy funkcję

$$h \longmapsto \frac{1}{h}[f(x+h)-f(x)]$$

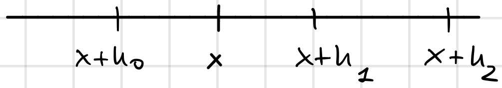
Funkcja ta jest monotoniczna: biorąc $h_2 > h_3$ i oznaczając $x_1 = x$ $x_2 = x+h_2$ $x_3 = x+h_3$ stosujemy nierówność (3)

$$\frac{1}{h_2}\big(f(x+h_2)-f(x)\big) \leq \frac{1}{h_3}\big(f(x+h_3)-f(x)\big)$$

Funkcja ta jest też ograniczona, co stwierdzimy biorąc $h_0 < 0 < h_1 < h_2$ i uzupełniając nierówność (3) o nierówność (1)

$$\frac{f(x+h_0)-f(x)}{h_0} \le \frac{f(x+h_2)-f(x)}{h_2} \le \frac{f(x+h_3)-f(x)}{h_3}$$

nierówność (1) dla $x_1 = x+h_0$, $x_2 = x$ $x_3 = x+h_1$



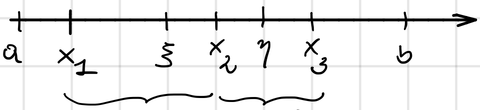
Zatem istnieją obie granice, $\lim\limits_{h\to 0^+}$ i $\lim\limits_{h\to 0^-}$ dla $h \to \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$, choć niekoniecznie są równe.

Istnienie tych granic gwarantuje także ciągłość funkcji wypukłej we wnętrzu odcinka [a,b].

RÓŻNICZKOWE KRYTERIUM WYPUKŁOŚCI

Funkcja różniczkowalna na]a,b[jest wypukła wtedy i tylko wtedy, gdy jej pochodna jest niemalejąca. Dla dwukrotnie różniczkowalnej funkcji oznacza to, że druga pochodna jest nieujemna.

DOWÓD:



tw. Lagrange'e

$$f'(\xi)(x_2-x_1) = f(x_2)-f(x_1)$$

$$f'(\xi) = \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$$

$$f'(\eta) = \frac{f(x_3)-f(x_2)}{x_3-x_2}$$

nierówność (1)

$$f'(\xi) \le f'(\eta)$$

Wobec dowolności x_1, x_2, x_3 wypukłość (nierówność (1)) jest równoważna monotoniczności pochodnej.

Kryterium związane z drugą pochodną jest już więc oczywiste.

FUNKCJE PIERWOTNE

Niech f będzie funkcją ciągłą określoną na odcinku $]a,b[$.
Funkcją pierwotną dla f nazywamy funkcję $F:]a,b[\to \mathbb{R}$, taką że

$$\forall x \in]a,b[\quad F'(x) = f(x)$$

Istnienie funkcji pierwotnej odkładamy na później – stosowne twierdzenie udowodnimy po omówieniu całki w sensie Riemanna

Zauważmy że funkcja pierwotna wyznaczona jest z dokładnością do stałej: jeśli $F'(x) = f(x)$ to także $(F(x)+C)' = f(x)$. Jeśli rozważamy funkcję określoną na niespójnym zbiorze, jak np $x \mapsto \frac{1}{x}$, z dziedziną $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ to funkcję pierwotną możemy wybrać używając różnych stałych na każdej składowej spójności

$$f(x) = \frac{1}{x} \qquad F(x) = \begin{cases} \log|x| + C_1 & x < 0 \\ \log|x| + C_2 & x > 0 \end{cases}$$

Tego rodzaju detale pomijamy w tradycyjnej notacji, w której funkcję pierwotną (cały zbiór funkcji pierwotnych) oznaczamy $\int f(x)dx$

Napiszemy więc $\int \frac{dx}{x} = \log|x| + C$ (kwestię różnych C zostawiamy w domyśle)

Wzory $(fg)' = f'g + fg'$ i $(f \circ g)'(x) = f'(g(x))g'(x)$ prowadzą do dwóch metod poszukiwania funkcji pierwotnych

CAŁKOWANIE PRZEZ CZĘŚCI:

$$\int f'(x)g(x)dx = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x)dx$$

Na przykład

$$\int x \log x \, dx = \frac{1}{2}x^2\log|x| - \int \frac{1}{2}x \, dx = \frac{1}{2}x^2\log|x| - \frac{1}{4}x^2 + C$$

$f'(x) = x \qquad g(x) = \log x$

$f(x) = \frac{1}{2}x^2 \qquad g'(x) = \frac{1}{x}$

CAŁKOWANIE PRZEZ PODSTAWIENIE:

$$\int f'(g(x))g'(x)dx = f(g(x)) + C$$

Na przykład

$$\int \operatorname{tg}x \, dx = \int \frac{\sin x}{\cos x}dx = \int -\frac{\cos' x \, dx}{\cos x} = -\log|\cos x| + C$$

$$\int tgx\,dx = \int \frac{\sin x}{\cos x}dx = \int - \frac{\cos' x\,dx}{\cos x} = -\log|\cos x| + C$$

$f(y) = -\log|y|$ $\quad f'(y) = \frac{-1}{y}$

$g(x) = \cos x$

$g'(x) = -\sin x$

$f'(g(x)) = -\frac{1}{\cos x}$

$f'(g(x))\,g'(x) = -\frac{1}{\cos x}(-\sin x) = tgx$

Według tradycyjnej notacji napisalibyśmy:

$$\int tgx\,dx = \int \frac{\sin x\,dx}{\cos x} = \left\{ \begin{array}{l} y = \cos x \\ dy = -\sin x\,dx \end{array} \right\} = \int \frac{-dy}{y} = -\log|y| + C = -\log|\cos x| + C$$