WZÓR TAYLORA

Niech f będzie różniczkowalną funkcją jednej zmiennej rzeczywistej określoną na odcinku I. Wówczas jej funkcja pochodna $f' : I \to \mathbb{R}$ także jest obiektem matematycznym tego samego gatunku co f, to znaczy rzeczywistą funkcją określoną na odcinku. Można zatem zadawać na jej temat podobne pytanie: czy f' jest ciągła, czy f' jest różniczkowalna ...

Jeśli f jest różniczkowalna na I i jej pochodna jest ciągła, mówimy, że f jest różniczkowalna w sposób ciągły lub że jest klasy C^1 na I. Piszemy też $f \in C^1(I)$. Jeśli w x_0 istnieje pochodna funkcji f' to mówimy, że f jest dwukrotnie różniczkowalna w x_0. Jeśli druga pochodna istnieje wszędzie na I to f jest dwukrotnie różniczkowalna, jeśli dodatkowo druga pochodna jest ciągła, to funkcja jest klasy C^2. Podobnie rzecz się ma z wyższymi pochodnymi. Mówimy więc o funkcjach klasy k-krotnie różniczkowalne lub klasy C^k

Funkcję różniczkowalną przybliżamy w okolicach ustalonego punktu wielomianem stopnia 1 według wzoru:

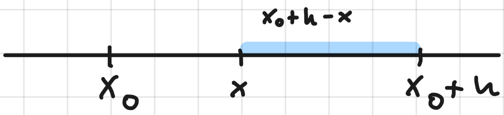
$$f(x_0+h) = f(x_0) + f'(x_0)h + r_1(x_0,h)$$

Wiadomo ponadto, że przybliżenie jest dobre, tzn $\lim\limits_{h\to 0} \frac{r_1(x_0,h)}{h} = 0$.

Funkcję, która jest więcej razy różniczkowalna można przybliżać wielomianem wyższego stopnia. Kandydatem na takie przybliżenie w okolicach punktu x_0 będzie wielomian

$$w_k(h) = f(x_0) + f'(x_0)h + \frac{1}{2!}f''(x_0)h^2 + \dots + \frac{1}{k!}f^{(k)}(x_0)h^k$$

Potrzebujemy także wiedzy na temat zachowania reszty. Dalsze rozważania prowadzić będziemy dla funkcji klasy C^n na I takiej, że dodatkowo $n+1$ pochodna istnieje na odcinku $]x_0, x_0+h[$, gdzie $[x_0, x_0+h] \subset I$.



Dla $x \in [x_0, x_0+h]$ definiujemy $\varphi(x)$

$$\varphi(x) = f(x_0+h) - f(x) - \frac{1}{1!}(x_0+h-x)f'(x) - \frac{1}{2!}(x_0+h-x)^2 f''(x) - \dots - \frac{1}{n!}(x_0+h-x)^n f^{(n)}(x)$$

φ jest ciągła na $[x_0, x_0+h]$ i różniczkowalna na $]x_0, x_0+h[$. Można obliczyć pochodną:

$$\varphi'(x) = -f'(x) + \frac{1}{1!}f'(x) - \frac{1}{1!}(x_0+h-x)f''(x) + \frac{2}{2!}(x_0+h-x)f''(x) - \frac{1}{2!}(x_0+h-x)^2 f^{(3)}(x) + \dots$$

$$+ \frac{1}{n!}\cdot n(x_0+h-x)^{n-1} f^{(n)}(x) - \frac{1}{n!}(x_0+h-x)^n f^{(n+1)}(x)$$

$$\varphi(x) = f(x_0+h) - f(x) - \frac{1}{1!}(x_0+h-x)f'(x) - \frac{1}{2!}(x_0+h-x)^2 f''(x) - \dots - \frac{1}{n!}(x_0+h-x)^n f^{(n)}(x)$$

$$\varphi'(x) = -\frac{1}{n!}(x_0+h-x)^n f^{(n+1)}(x)$$

$$\varphi(x_0+h) = 0 \qquad \varphi(x_0) = f(x_0+h) - f(x_0) - f'(x)h - \frac{1}{2!}f''(x)h^2 - \dots - \frac{1}{n!}h^n f^{(n)}(x) \neq 0$$

Chcielibyśmy skorzystać z tw. Rolle'a ale nie możemy, bo dlatego

φ trzeba trochę poprawić:

$$\Phi(x) = \varphi(x) - \frac{\varphi(x_0)}{h^k}(x_0+h-x)^k$$

$$\Phi(x_0) = \varphi(x_0) - \frac{\varphi(x_0)}{h^k}\cdot h^k = 0 \qquad \Phi(x_0+h) = \overbrace{\varphi(x_0+h)}^{=0} - \frac{\varphi(x_0)}{h^k}\cdot 0 = 0$$

$$\Phi'(x) = \varphi'(x) + \frac{k}{h^k}\varphi(x_0)(x_0+h-x)^{k-1}$$

Na mocy tw Rolle'a istnieje $\xi \in]x_0, x_0+h[$ takie, że $\Phi'(\xi) = 0$

$$0 = \varphi'(\xi) + \frac{k}{h^k}\varphi(x_0)(x_0+h-\xi)^{k-1} = -\frac{1}{n!}(x_0+h-\xi)^n f^{(n+1)}(\xi) + \frac{k}{h^k}\varphi(x_0)(x_0+h-\xi)^{k-1}$$

$$\varphi(x_0) = \frac{h^k}{kn!}(x_0+h-\xi)^{n-k+1} f^{(n+1)}(\xi)$$

$$f(x_0+h) - f(x_0) - f'(x)h - \frac{1}{2!}f''(x)h^2 - \dots - \frac{1}{n!}h^n f^{(n)}(x) = \frac{h^k}{kn!}(x_0+h-\xi)^{n-k+1} f^{(n+1)}(\xi)$$

$$\boxed{f(x_0+h) = f(x_0) + f'(x)h + \frac{1}{2!}f''(x)h^2 + \dots + \frac{1}{n!}h^n f^{(n)}(x) + \frac{h^k}{kn!}(x_0+h-\xi)^{n-k+1} f^{(n+1)}(\xi)}$$

WZÓR TAYLORA

Reszta $r_n(x_0,h) = \frac{h^k}{kn!}(x_0+h-\xi)^{n-k+1} f^{(k+1)}(\xi)$

Sprawdzenie, czy przybliżenie jest dobre polega na policzeniu granicy

$$\lim_{h\to 0}\frac{1}{h^n}\left(f(x_0+h) - f(x_0) - f'(x_0)h - \frac{1}{2!}f''(x_0)h^2 - \dots - \frac{1}{n!}f^{(n)}(x_0)h^n\right) \overset{H}{=}$$

Jest to granica typu $\frac{0}{0}$ więc korzystamy z reguły de l'Hospitala

$$\overset{H}{=} \lim_{h\to 0} \frac{1}{n\,h^{n-1}} \left(f'(x_0+h) - f'(x_0) - f''(x_0)h - \frac{1}{2!} f^{(3)}(x_0)h^2 - \dots - \frac{1}{(n-1)!} f^{(n)}(x_0)h^{n-1} \right)$$

$$\overset{H}{=} \lim_{h\to 0} \frac{1}{n(n-1)\,h^{n-2}} \left(f''(x_0+h) - f''(x_0) - f^{(3)}(x_0)h - \dots - \frac{1}{(n-2)!} f^{(n)}(x_0)h^{n-2} \right) =$$

$$\overset{H}{=} \dots \overset{H}{=} \lim_{h\to 0} \frac{1}{n!\,h} \left(f^{(n-1)}(x_0+h) - f^{(n-1)}(x_0) - f^{(n)}(x_0)h \right) =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{1}{n!} \left[\frac{f^{n-1}(x_0+h) - f^{n-1}(x_0)}{h} - f^{(n)}(x_0) \right] = \frac{1}{n!}\left[f^{(n)}(x_0) - f^{(n)}(x_0) \right] =$$

$$= 0$$

Wyprowadzenie, które zrobiliśmy ma tę zaletę, że proponuje postacie reszty:

$$r_n(x_0,h) = \frac{h^k}{k\,n!}(x_0+h-\xi)^{n-k+1} f^{(n+1)}(\xi)$$ RESZTA W POSTACI SCHLOMLICHA

$k = n+1$ $\qquad \frac{1}{(n+1)!} h^{n+1} f^{(n+1)}(\xi)$ RESZTA W POSTACI LAGRANGE'A

$k = 1$ $\qquad \frac{h(x_0+h-\xi)^n}{n!} f^{(n+1)}(\xi)$ RESZTA W POSTACI CAUCHY'EGO

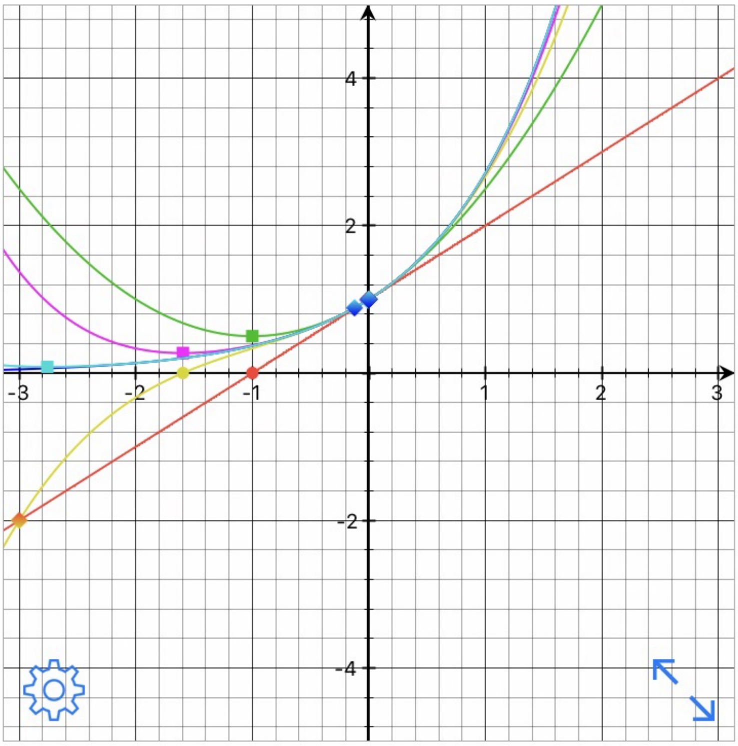
UWAGA! Twierdzenie Taylora mówi, że reszta, czyli $f(x_0+h) - w_n(h)$ szybko znika dla $h \to 0$ (szybko, to znaczy szybciej niż h^n), natomiast nie mówi nic o granicy przy $n \to \infty$, to znaczy czy rzeczywiście rozwijanie do coraz wyższych pochodnych rzeczywiście przybliża funkcję coraz lepiej w otoczeniu x_0, to znaczy czy

$$f(x_0+h) = \lim_{n\to\infty} w_n(h)$$

Dla wielu funkcji taka równość zachodzi dla h z pewnego odcinka wokół 0. Dla niektórych zachodzi dla dowolnego h, ale można także znaleźć przykład takiej funkcji, że równość nie zachodzi dla żadnego $h \neq 0$.

PRZYKŁADY: Niech $f(x) = e^x$, wtedy $f^{(n)}(x) = e^x$ i $f^{(n)}(0) = 1$

$$e^h = 1 + h + \frac{1}{2!}h^2 + \frac{1}{3!}h^3 + \dots + \frac{1}{n!}h^n + r_n(0,h)$$



$$\exp(x)$$

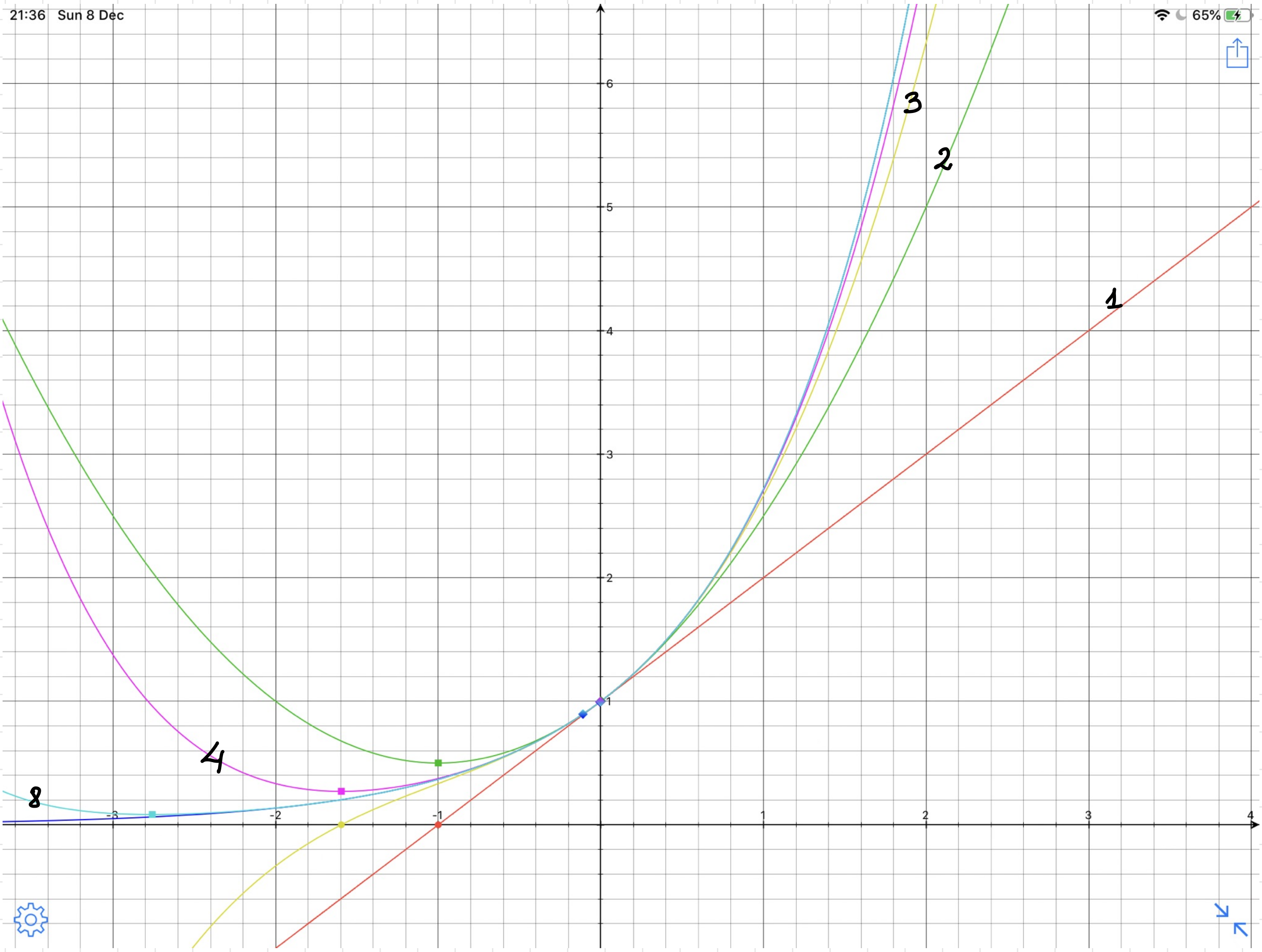
$$1+x$$

$$1+x+\frac{x^2}{2}$$

$$1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}$$

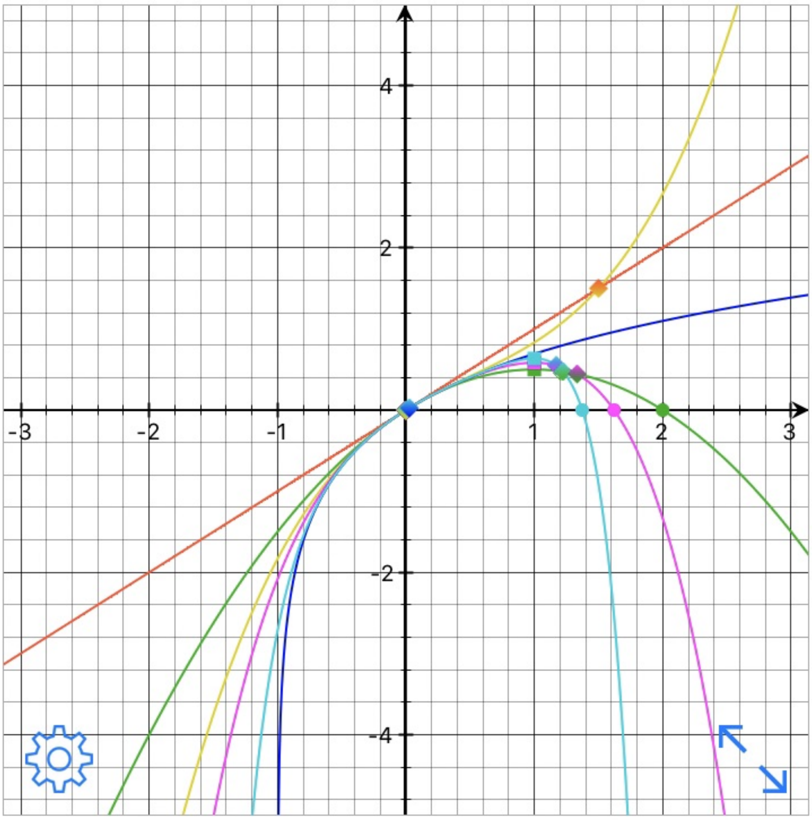
$$1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}+\frac{x^4}{24}$$

$$1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}+\frac{x^4}{24}+\frac{x^5}{120}+\frac{x^6}{6!}+\frac{x^7}{7!}+\frac{x^8}{8!}$$



$$f(x) = \log(x+1) \qquad f'(x) = \frac{1}{1+x} \qquad f''(x) = -\frac{1}{(x+1)^2} \qquad f^{(n)}(x) = (-1)^{n+1}\frac{(n-1)!}{(x+1)^n}$$

$$\log(x+1) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots + (-1)^n\frac{x^n}{n} + r_n(0,x)$$



$$\ln(1+x)$$

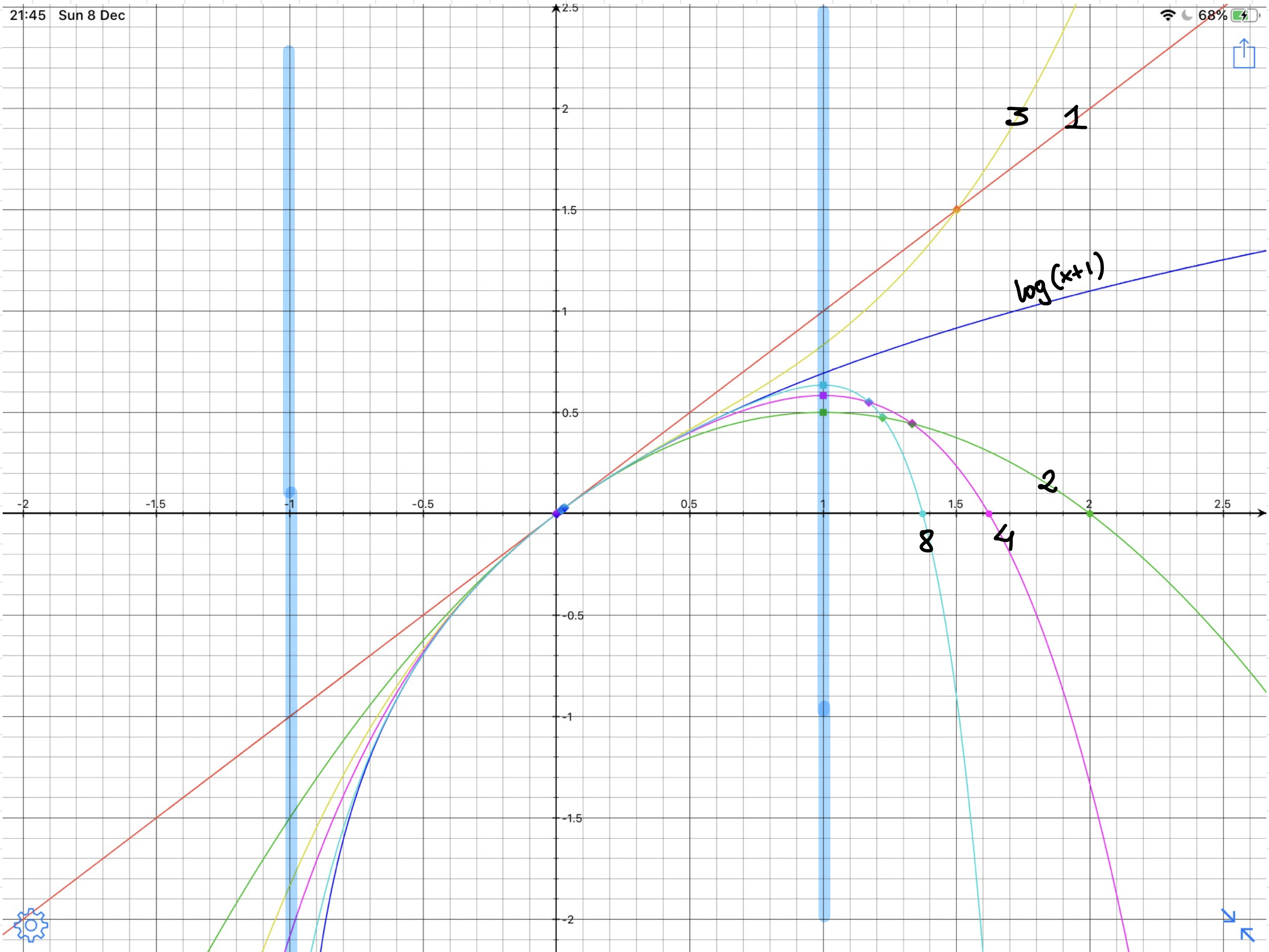
$$x$$

$$x - \frac{x^2}{2}$$

$$x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}$$

$$x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4}$$

$$x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^6}{6} + \frac{x^7}{7} - \frac{x^8}{8}$$



$$f(x)=\begin{cases}\exp\left(-\frac{1}{x^2}\right) & x\neq 0\\ 0 & x=0\end{cases}$$

f jest oczywiście różniczkowalna nieskończenie wiele razy w wszędzie poza, być może $x=0$.

Można wykazać, że także w $x=0$ f jest nieskończenie wiele razy różniczkowalna i $f^{(n)}(0)=0$ dla dowolnego n. Wielomian $w_n(x)$ jest więc stały i równy zero. Jednocześnie funkcja poza $x=0$ jest niezerowa. W otoczeniu $x=0$ nie da się jej przybliżyć wielomianem.