WYKŁAD 11

CAŁKA RIEMANNA

CAŁKA RIEMANNA

$[a,b] \subset \mathbb{R}$ odcinek zwarty, $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ funkcja ograniczona

$J = \{t_0, t_1, \dots, t_n\}$ $t_0 = a < t_1 < t_2 < \dots < t_{n-1} < t_n = b$ $I_i = [t_{i-1}, t_i]$ $|I_i| = t_i - t_{i-1}$

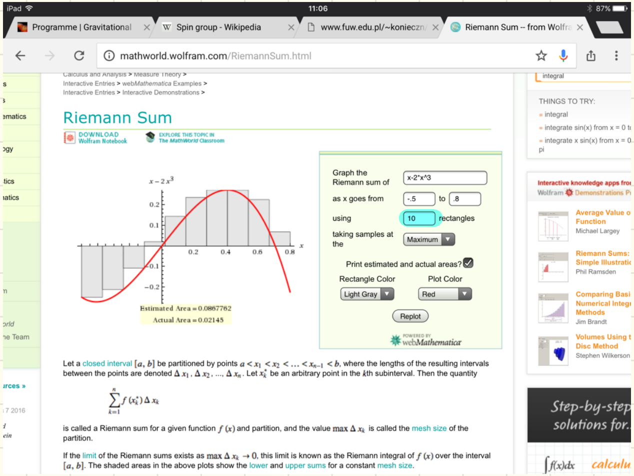
podział odcinka

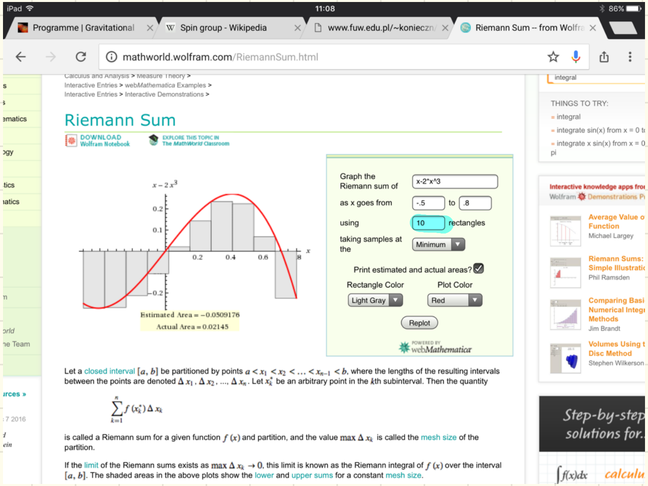
SUMA GÓRNA

$$\overline{S}(f,J) = \sum_{i=1}^{n} \sup_{x \in I_i} f(x)\,|I_i|$$

SUMA DOLNA

$$\underline{S}(f,J) = \sum_{i=1}^{n} \inf_{x \in I_i} f(x)\,|I_i|$$





CAŁKA RIEMANNA

$[a,b]\subset\mathbb{R}$ odcinek zwarty, $f:[a,b]\longrightarrow\mathbb{R}$ funkcja ograniczona

$\mathcal{T}=\{t_0,t_1,\dots,t_n\}$ $\quad t_0=a<t_1<t_2<\dots<t_{n-1}<t_n=b \qquad I_i=[t_{i-1},t_i] \qquad |I_i|=t_i-t_{i-1}$

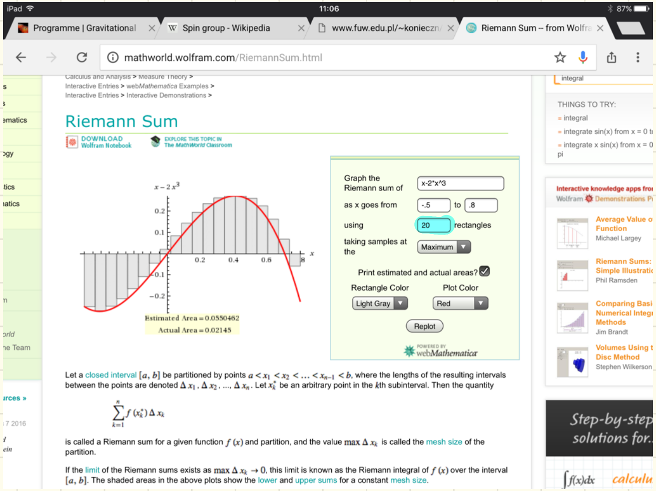
podział odcinka

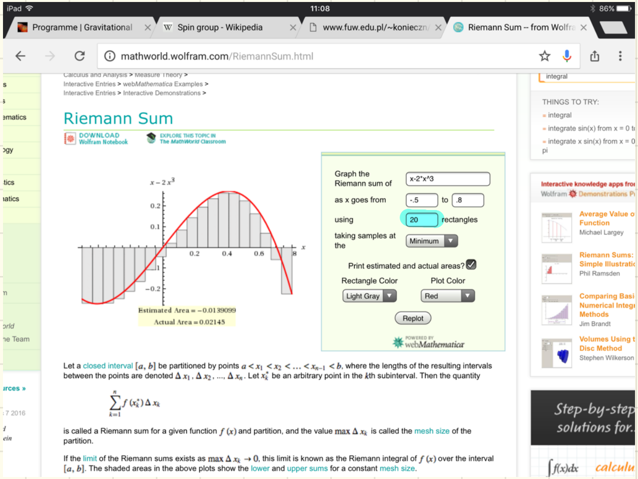
SUMA GÓRNA

$$\overline{S}(f,\mathcal{T})=\sum_{i=1}^{n}\sup_{x\in I_i} f(x)\,|I_i|$$

SUMA DOLNA

$$\underline{S}(f,\mathcal{T})=\sum_{i=1}^{n}\inf_{x\in I_i} f(x)\,|I_i|$$





CAŁKA RIEMANNA

1.

$[a,b] \subset \mathbb{R}$ odcinek zwarty, $f:[a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ funkcja ograniczona

$\mathcal{T} = \{t_0, t_1, \dots, t_n\}$ $\quad t_0 = a < t_1 < t_2 < \dots < t_{n-1} < t_n = b \qquad I_i = [t_{i-1}, t_i] \qquad |I_i| = t_i - t_{i-1}$

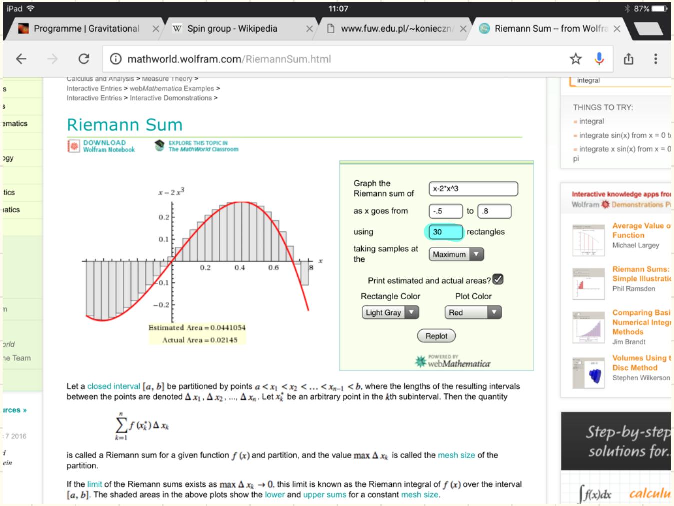
podział odcinka

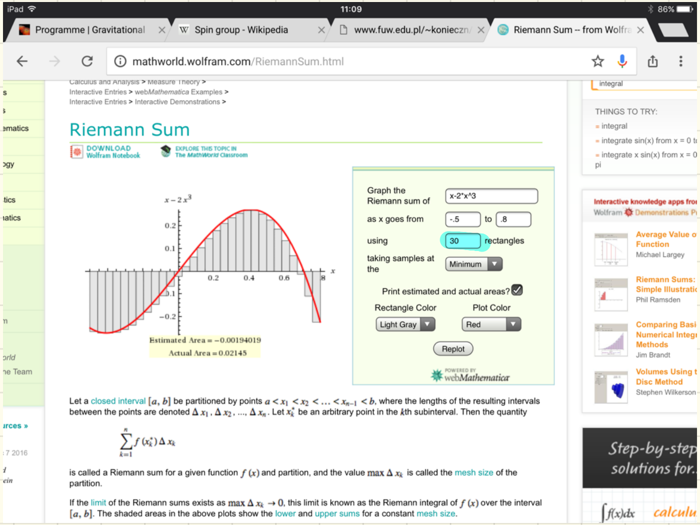
SUMA GÓRNA

$$\overline{S}(f,\mathcal{T}) = \sum_{i=1}^{n} \sup_{x \in I_i} f(x)\,|I_i|$$

SUMA DOLNA

$$\underline{S}(f,\mathcal{T}) = \sum_{i=1}^{n} \inf_{x \in I_i} f(x)\,|I_i|$$





Funkcja f jest ograniczona, tzn $\sup_{x\in[a,b]} f(x)$, $\inf_{x\in[a,b]} f(x)$ są skończone.

$$\inf_{x\in[a,b]} f(x)\,(b-a) \leqslant \underline{S}(f,\pi) \leqslant \overline{S}(f,\pi) \leqslant \sup_{x\in[a,b]} f(x)\,(b-a)$$

odwzorowania $\pi \longmapsto \underline{S}(f,\pi)$, $\pi \longmapsto \overline{S}(f,\pi)$ są ograniczone. Istnieją więc

$$\sup_{\pi} \underline{S}(f,\pi) = \underline{\int_{[a,b]}} f \qquad\qquad \inf_{\pi} \overline{S}(f,\pi) = \overline{\int_{[a,b]}} f$$

CAŁKA DOLNA — CAŁKA GÓRNA

DEFINICJA: Mówimy, że f jest całkowalna w sensie Riemanna na $[a,b]$ jeśli

$$\underline{\int_{[a,b]}} f = \overline{\int_{[a,b]}} f.$$

Wspólną wartość oznaczamy $\int_{[a,b]} f$

Funkcja f jest ograniczona, tzn $\sup_{x\in[a,b]} f(x)$, $\inf_{x\in[a,b]} f(x)$ są skończone. 2.

$$\inf_{x\in[a,b]} f(x)\,(b-a) \leqslant \underline{S}(f,\pi) \leqslant \overline{S}(f,\pi) \leqslant \sup_{x\in[a,b]} f(x)\,(b-a)$$

odwzorowanie $\pi \longmapsto \underline{S}(f,\pi)$, $\pi \longmapsto \overline{S}(f,\pi)$ są ograniczone. Istnieją więc

$$\sup_{\pi} \underline{S}(f,\pi) = \underline{\int_{[a,b]}} f \qquad \inf_{\pi} \overline{S}(f,\pi) = \overline{\int_{[a,b]}} f$$

CAŁKA DOLNA CAŁKA GÓRNA

DEFINICJA: Mówimy, że f jest całkowalna ... $[a,b]$ jeśli

$$\underline{\int_{[a,b]}} f = \overline{\int_{[a,b]}} f.$$ Wspólną war...

Całka zdefiniowana, można iść spać...

POLICZYĆ JAKĄŚ CAŁKĘ Z DEFINICJI

JAKIE FUNKCJE SĄ CAŁKOWALNE?
opisać $\mathcal{R}([a,b])$

CO BĘDZIEMY ROBIĆ DALEJ?

WŁASNOŚCI CAŁKI RIEMANNA

JAK PRAKTYCZNIE LICZYĆ CAŁKI?

Całki niewłaściwe
Zbieżność
Całki z parametrem
Całka w $\mathbb{R}^n$
⋮

ZADANIE: KORZYSTAJĄC Z DEFINICJI POLICZYĆ $\int_{[0,1]} f$ $\quad f(x)=x^2$ **4.**

$$\Pi_n = \left\{0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \dots, \frac{n-1}{n}, 1\right\}$$

$$\underline{S}(f,\Pi_n) = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{i-1}{n}\right)^2 \cdot \frac{1}{n} = \frac{1}{n^3}\sum_{i=1}^{n} (i-1)^2 =$$

$$= \frac{1}{n^3}\left(1+2^2+3^2+\dots+(n-1)^2\right)$$

$$\overline{S}(f,\Pi_n) = \sum_{i=1}^{n} \frac{i^2}{n^2}\,\frac{1}{n} = \frac{1}{n^3}\sum_{i=1}^{n} i^2 =$$

$$= \frac{1}{n^3}\left(1+2^2+\dots+n^2\right)$$

$\overline{S}(f,\Pi_n) - \underline{S}(f,\Pi_n) = \frac{1}{n}$ wiadomo, że $\forall \Pi \quad \underline{S}(f,\Pi) \leq \underline{\int} f \leq \overline{\int} f \leq \overline{S}(f,\Pi)$

Ustalmy $\varepsilon>0$. Wiadomo, że istnieje n: $\frac{1}{n} < \varepsilon$, zatem

$\overline{S}(f,\Pi_n) - \underline{S}(f,\Pi_n) < \varepsilon$, co za tym idzie $\overline{\int_I} f - \underline{\int_I} f < \varepsilon$. Z dowolności ε $\underline{\int} f = \overline{\int} f$

f jest więc całkowalna

5

$$\int_I f = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^3}\sum_{k=1}^{n} k^2 = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^3}\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

To można wyprowadzić!

$$\sum_{i=0}^{n} i^3 = 0+1+2^3+\dots+n^3 = A \qquad B-A=(n+1)^3$$

$$\sum_{i=0}^{n}(i+1)^3 = 1^3+2^3+\dots+(n+1)^3 = B \qquad \sum_{i=0}^{n}(i+1)^3 - i^3 = \sum_{i=0}^{n}\left[(i+1)-i\right]\left[(i+1)^2+(i+1)i+i^2\right] = \sum\left(i^2+2i+1+i^2+i+i^2\right)$$

$$= 3\sum_{i=0}^{n} i^2 + 3\sum_{i=0}^{n} i + \sum_{i=1}^{1} 1$$

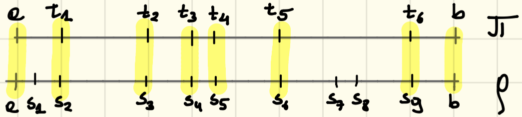
$$(n+1)^3 = n^3+3n^2+3n+\cancel{1} = 3\sum_{i=1}^{n} i^2 + 3\sum_{i=1}^{n} i + n + \cancel{1}$$

$$3\sum_{1}^{n} i^2 = n^3+3n^2+3n-3\frac{n(n+1)}{2} - n \qquad 6\sum_{1}^{n} i^2 = 2n^3+6n^2+6n-3n^2-3n-2n =$$

$$= 2n^3+3n^2+n = n(2n^2+3n+1) = n(2n+1)(n+1)$$

TWIERDZENIE f jest całkowalna na $[a,b]$ wtedy i tylko wtedy gdy dla dowolnego $\varepsilon>0$ istnieje π takie, że $\overline{S}(f,\pi) - \underline{S}(f,\pi) < \varepsilon$.

DEFINICJA Podział ρ jest drobniejszy niż π jeśli $\pi \subset \rho$



Relacja „bycia drobniejszym" jest częściowym porządkiem w zbiorze podziałów, tzn jest antysymetryczne i przechodnie

Dla każdych dwóch podziałów π i π' istnieje ρ późniejszy niż π i π'. Wystarczy więc $\rho = \pi \cup \pi'$

STWIERDZENIE: Jeśli ρ drobniejszy niż π zachodzi

$$\underline{S}(f,\pi) \leq \underline{S}(f,\rho) \leq \overline{S}(f,\rho) \leq \overline{S}(f,\pi)$$

DOWÓD Oczywisty.

WNIOSKI Każda suma dolna jest nie większa od każdej sumy górnej. Wobec tego całka dolna jest nie większa od całki górnej.

DOWÓD TWIERDZENIA Jeśli f całkowalna na $[a,b]$ to $\underline{\int} f = \overline{\int} f$. Ustalmy $\varepsilon > 0$ z definicji sup $\exists \pi$: $\underline{\int} f - \underline{S}(f,\pi) < \varepsilon/2$ podobnie $\exists \pi'$ $\overline{S}(f,\pi') - \overline{\int} f < \varepsilon/2$

Takie same nierówności zachodzą dla $\rho = \pi \cup \pi'$. Wtedy $\overline{S}(f,\rho) - \underline{S}(f,\rho) < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$.

W drugą stronę dowód oczywisty, wynika z $\underline{S}(f,\pi) \leq \underline{\int} f \leq \overline{\int} f \leq \overline{S}(f,\pi)$. ∎

JAKIE FUNKCJE SĄ CAŁKOWALNE?

$\mathcal{R}([a,b])$ ← całkowalne w sensie Riemanna na $[a,b]$

STWIERDZENIE 1. $\mathcal{R}([a,b])$ jest podprzestrzenią wektorową $\mathrm{Map}([a,b],\mathbb{R})$. Całka Riemanna jest funkcjonałem liniowym na $\mathcal{R}([a,b])$

DOWÓD: Niech $f,g\in\mathcal{R}([a,b])$, $\lambda\in\mathbb{R}$, $\lambda>0$ $\underline{S}(\lambda f,\pi)=\lambda\underline{S}(f,\pi)$, $\overline{S}(\lambda f,\pi)=\lambda\overline{S}(f,\pi)$ wynika z tego, że $\underline{\int}\lambda f=\lambda\underline{\int}f$ i $\overline{\int}\lambda f=\lambda\overline{\int}f$. Jeśli więc $f\in\mathcal{R}([a,b])$ to $\underline{\int}\lambda f=\lambda\underline{\int}f=\lambda\overline{\int}f=\overline{\int}\lambda f$ więc $\underline{\int}\lambda f=\overline{\int}\lambda f=\int\lambda f$ tzn $(\lambda f)\in\mathcal{R}([a,b])$. i $\int\lambda f=\lambda\int f$. Gdy $\lambda<0$ mamy $\overline{S}(\lambda f,\pi)=\lambda\underline{S}(f,\pi)$ oraz $\underline{S}(\lambda f,\pi)=\lambda\overline{S}(f,\pi)$, dalej $\underline{\int}\lambda f=\lambda\overline{\int}f$, $\overline{\int}\lambda f=\lambda\underline{\int}f$ ... dalej oczywiste.

$$\overline{S}(f+g,\pi)=\sum_i\sup_{I_i}(f+g)|I_i|\leq\sum_i\left[\sup_{I_i}(f)+\sup_{I_i}(g)\right]|I_i|=\overline{S}(f,\pi)+\overline{S}(g,\pi)$$

$$\underline{S}(f+g,\pi)=\sum_i\inf_{I_i}(f+g)|I_i|\geq\sum_i\left(\inf_{I_i}(f)+\inf_{I_i}(g)\right)|I_i|=\underline{S}(f,\pi)+\underline{S}(g,\pi)$$

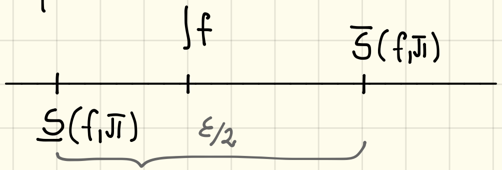
$$\underline{S}(f,\pi)+\underline{S}(g,\pi)\leq\underline{S}(f+g,\pi)\leq\overline{S}(f+g,\pi)\leq\overline{S}(f,\pi)+\overline{S}(g,\pi)$$

$$\underline{S}(f,\pi)+\underline{S}(g,\pi)\leqslant \underline{S}(f+g,\pi)\leqslant \overline{S}(f+g,\pi)\leqslant \overline{S}(f,\pi)+\overline{S}(g,\pi)$$

Weźmy π: $\overline{S}(f,\pi)-\underline{S}(f,\pi)<\varepsilon/2$ i $\overline{S}(g,\pi)-\underline{S}(g,\pi)<\varepsilon/2$ wtedy

$$\overline{S}(f+g,\pi)-\underline{S}(f+g,\pi)<\varepsilon \implies f+g\in \mathcal{R}([a,b])$$

Dalej



$\implies$

podobnie dla g

$$\int f-\underline{S}(f,\pi)<\varepsilon/2 \qquad \int g-\underline{S}(g,\pi)<\varepsilon/2$$

$$\overline{S}(f,\pi)-\int f<\varepsilon/2 \qquad \overline{S}(g,\pi)-\int \;<\varepsilon/2$$

$$\int(f+g)\leqslant \overline{S}(f+g,\pi)\leqslant \overline{S}(f,\pi)+\overline{S}(g,\pi)<\int f+\int g+\varepsilon$$

$$\int(f+g)\geqslant \underline{S}(f+g,\pi)\geqslant \underline{S}(f,\pi)+\underline{S}(g,\pi)>\int f+\int g-\varepsilon$$

$$\int f+\int g-\varepsilon<\int f+g<\int f+\int g+\varepsilon$$

$$\Downarrow$$

$$\left|\int f+g-\left(\int f+\int g\right)\right|<\varepsilon \implies \int f+g=\int f+\int g \quad \blacksquare$$

STWIERDZENIE 2 Jeśli $f \in \mathcal{R}([a,b])$, $F: J \to \mathbb{R}$ ciągła, jeśli $f([a,b]) \subset J$ to $F \circ f \in \mathcal{R}([a,b])$

DOWÓD

f ograniczona, tzn $c = \inf f$, $d = \sup f$ są skończone, $[c,d] \subset J$.
$F|_{[c,d]}$ jako funkcja ciągła na zbiorze zwartym jest jednostajnie ciągła tzn dla $\varepsilon > 0$ $\exists \delta$ $\forall y_1, y_2 \in [c,d]$ $|y_1 - y_2| < \delta \Rightarrow |F(y_1) - F(y_2)| < \varepsilon$

Ustalmy $\varepsilon > 0$ i weźmy odpowiednie δ, można przyjąć $\delta < \varepsilon$. Weźmy π: $\overline{S}(f,\pi) - \underline{S}(f,\pi) < \delta^2$. Oznaczenia:

$\pi = \{t_0, t_1, \ldots, t_n\}$ $I_i = [t_{i-1}, t_i]$ $M_i = \sup\limits_{I_i} f(x)$. $m_i = \sup\limits_{I_i} f(x)$ $\widetilde{M}_i = \sup\limits_{I_i} F \circ f$ $\widetilde{m}_i = \inf\limits_{I_i} F \circ f$

$K = \sup\limits_{[c,d]} |F(y)|$ $\qquad \{0, 1, \ldots, n\} = A \cup B$

$i \in A \Leftrightarrow M_i - m_i < \delta$ $\qquad$ $i \in B \Leftrightarrow M_i - m_i \geq \delta$

$i \in A \Rightarrow \widetilde{M}_i - \widetilde{m}_i < \varepsilon$

$$\overline{S}(F \circ f, \pi) - \underline{S}(F \circ f, \pi) = \sum_{i \in A \cup B} (\widetilde{M}_i - \widetilde{m}_i)\,|I_i|$$

$$\sum_{i\in A}(\tilde{M}_i-\tilde{m}_i)|I_i| < \sum_{i\in A}\varepsilon|I_i| < \varepsilon(b-a)$$

$$\underbrace{\delta\sum_{i\in B}|I_i| \leqslant \sum_{i\in B}(M_i-m_i)}_{M_i-m_i\geqslant\delta \text{ dla } i\in B}|I_i| \leqslant \overline{S}(f,\Pi)-\underline{S}(f,\Pi) < \delta^2$$

$$\Rightarrow \delta\sum_{i\in B}|I_i| < \delta^2 \qquad \sum_{i\in B}|I_i| < \delta$$

$$\overline{S}(F\circ f,\Pi)-\underline{S}(F\circ f,\Pi) = \sum_{i\in A}(\tilde{M}_i-\tilde{m}_i)|I_i| + \sum_{i\in B}\overbrace{(\tilde{M}_i-\tilde{m}_i)}^{\leqslant 2K}|I_i| \leqslant \varepsilon(b-a)+2K\delta <$$

$$\varepsilon(b-a)+2K\varepsilon = \varepsilon\left((b-a)+2K\right)$$

$F\circ f$ jest więc całkowalna. ∎

STWIERDZENIE 3 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ $f(x)=x$ f jest całkowalna na każdym odcinku $[a,b]$

DOWÓD

Ustalmy $[a,b]$ i weźmy Π_n - podział $[a,b]$ na n równych części

$t_0=a$, $t_1=a+\frac{b-a}{n}$, ..., $t_n=b$

$$\overline{S}(f,\Pi)-\underline{S}(f,\Pi)=\sum_{i=1}^{n}\left(\cancel{a}+\frac{i(b-a)}{n}-\left(\cancel{a}+\frac{(i-1)(b-a)}{n}\right)\right)\cdot\frac{1}{n}=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n^2}(b-a)=\frac{1}{n}(b-a)$$

$$\forall \varepsilon>0\ \exists n: \frac{(b-a)}{n}<\varepsilon$$

∎

WNIOSKI:

(i) z STW 2 i STW 3 wynika, że funkcje ciągłe są całkowalne:

$$F = \underset{\text{ciągłe}}{F} \circ \underset{\text{całkowalne}}{id}$$

(ii) Jeśli f, g całkowalne to $f \cdot g$ całkowalna: $f+g$ i $f-g$ są całkowalne z STW 1, $x \longmapsto x^2$ jest ciągła, dalej z STW 1 i STW 2:

$$fg = \frac{1}{4}\left((f+g)^2 - (f-g)^2\right)$$

(iii) $x \longmapsto |x|$ jest ciągła, zatem jeśli f całkowalna, to $|f|$ całkowalna

Porównując odpowiednie sumy łatwo stwierdzić, że jeśli $f \leq g$ to $\int_{[a,b]} f \leq \int_{[a,b]} g$

zatem także $\int f \leq \int |f|$, wiadomo też, że $-\int f = \int (-f) \leq \int |f|$

zatem $\boxed{\left|\int_{[a,b]} f\right| \leq \int_{[a,b]} |f|}$

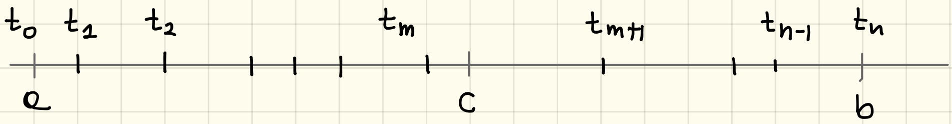
STWIERDZENIE 4 $f \in \mathcal{R}([a,b])$ $c \in]a,b[$. Wtedy $f|_{[a,c]} \in \mathcal{R}([a,c])$ i $f|_{[c,b]} \in \mathcal{R}([c,b])$. Ponadto

12

$$\int_{[a,b]} f = \int_{[a,c]} f + \int_{[c,b]} f$$

DOWÓD:

$$f \in \mathcal{R}([a,b]) \Rightarrow \exists \pi : \overline{S}(f,\pi) - \underline{S}(f,\pi) < \varepsilon$$



Niech $\pi_0 = \pi \cup \{c\}$. Wówczas π_0 jest drobniejszy niż π i zachodzi

$$\overline{S}(f,\pi_0) - \underline{S}(f,\pi_0) < \varepsilon$$

$\pi_1 = \{a, t_1, \dots, t_m, c\}$ podział $[a,c]$ $\quad$ $\pi_2 = \{c, t_{m+1}, \dots, b\}$ podział $[c,b]$ $\quad$ $S(f,\pi) = S(f,\pi_1) + S(f,\pi_2)$

$$\varepsilon > \overline{S}(f,\pi_0) - \underline{S}(f,\pi_0) = \overline{S}(f,\pi_1) + \overline{S}(f,\pi_2) - \underline{S}(f,\pi_1) - \underline{S}(f,\pi_2)$$

$$\varepsilon > \overline{S}(f,\pi) - \underline{S}(f,\pi) = \overline{S}(f,\pi_1) + \overline{S}(f,\pi_2) - \underline{S}(f,\pi_1) - \underline{S}(f,\pi_2)$$

$$\overline{S}(f,\pi_1) - \underline{S}(f,\pi_1) < \varepsilon$$

$$\overline{S}(f,\pi_2) - \underline{S}(f,\pi_2) < \varepsilon$$

$$f|_{[a,c]} \in \mathcal{R}([a,c])$$

$$f|_{[b,c]} \in \mathcal{R}([b,c])$$

13

RÓWNOŚĆ CAŁEK:

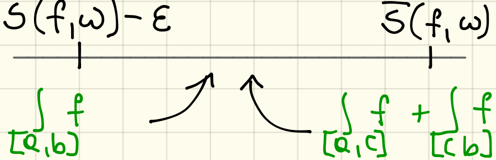
Ustalmy $\varepsilon>0$

weźmy π_1, π_2 : $\overline{S}(f|_{[a,c]}, \pi_1) \leq \int_{[a,c]} f + \varepsilon/2$ $\quad \overline{S}(f|_{[c,b]}, \pi_2) \leq \int_{[c,b]} f + \varepsilon/2$

dla $\pi = \pi_1 \cup \pi_2$: $\overline{S}(f,\pi) = \overline{S}(f|_{[a,c]}, \pi_1) + \overline{S}(f_{[c,b]}, \pi_2) \leq \int_{[a,c]} f + \int_{[c,b]} f + \varepsilon$ $\quad (*)$

istnieje też ρ : $\overline{S}(f,\pi) \leq \int_{[a,b]} f + \varepsilon$ $\quad (**)$

dla ω drobniejszego od π i ρ zachodzą obie nierówności



$$\left| \int_{[a,b]} f - \left(\int_{[a,c]} f + \int_{[c,b]} f \right) \right| < \varepsilon$$

TWIERDZENIE (O WARTOŚCI ŚREDNIEJ)

$f, g \in \mathcal{R}([a,b])$ $g \geq 0$ ISTNIEJE $c \in \mathbb{R}$ TAKIE, ŻE 14

$$\inf_{[a,b]} f \leq c \leq \sup_{[a,b]} f \quad i \quad \int_I f \cdot g = c \int_I g$$

DOWÓD: $m = \inf_{[a,b]} f$, $M = \sup_{[a,b]} f$ $\quad m \leq f(x) \leq M \xRightarrow{\text{bo } g(x) \geq 0} mg(x) \leq f(x)g(x) \leq Mg(x)$

$$m \int_{[a,b]} g \leq \int_{[a,b]} fg \leq M \int_{[a,b]} g \quad \Big/ : \int_{[a,b]} g$$

A CO JEŚLI $\int_{[a,b]} g = 0$?

$$m \leq \underbrace{\left(\int_{[a,b]} g\right)^{-1} \int_{[a,b]} fg}_{c} \leq M$$

WTEDY $g = 0$, $\int_{[a,b]} fg = 0$ i c DOWOLNE!

$$c = \left(\int_{[a,b]} g\right)^{-1} \int_{[a,b]} fg \Rightarrow \int_{[a,b]} fg = c \int_{[a,b]} g$$

WNIOSKI: (1) JEŚLI f CIĄGŁA, TO $\exists \xi \in [a,b]: \ f(\xi) = c$

$$\int_{[a,b]} fg = f(\xi) \int_{[a,b]} g$$

(2) f CIĄGŁA, $g(x) = 1$: $\int_{[a,b]} f = f(\xi)(b-a)$

15

TWIERDZENIE: PODSTAWOWE R.R. i C.

JEŚLI f JEST CIĄGŁA NA $[a,b]$ TO $F(x) = \int_{[a,x]} f$ JEST RÓŻNICZKOWALNA i

$$F'(x) = f \quad \text{DLA} \quad x \in]a,b[$$

DOWÓD:

$h > 0$

$$\frac{1}{h}\left[F(x+h) - F(x)\right] = \frac{1}{h}\left[\int_{[a,x+h]} f - \int_{[a,x]} f\right] = \frac{1}{h}\int_{[x,x+h]} f \overset{\text{TW. O WARTOŚCI ŚREDNIEJ}}{=} \frac{1}{h} f(\xi(h)) \cdot h$$

$\xi(h) \in [x, x+h]$

$\xi(h) \longrightarrow x$ DLA $h \longrightarrow 0$

$$\lim_{h \to 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \lim_{h \to 0} f(\xi(h)) = f(x)$$

PODOBNIE DLA $h < 0$

WNIOSEK: JEŚLI G JEST FUNKCJĄ PIERWOTNĄ DLA CIĄGŁEJ FUNKCJI f

TO $\int_{[a,b]} f = G(b) - G(a)$

16

DOWÓD: Z P.T.R.R.i.C. WIADOMO, ŻE $F(x) = \int_{[a,x]} f$ JEST FUNKCJĄ PIERWOTNĄ, ZATEM

$$G(x) = F(x) + \underbrace{C}_{\text{STAŁA}} \qquad G(x) = \int_{[a,x]} f + C$$

$$x = a: \quad G(a) = C$$

$$x = b: \quad G(b) = \int_{[a,b]} f + C$$

$$\Downarrow$$

$$\int_{[a,b]} f = G(b) - C = G(b) - G(a)$$