

WYKŁAD 11

CATKA RIEMANNA

1.

CAŁKA RIEMANNA

$[a, b] \subset \mathbb{R}$ odcinek **zawarty**, $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ funkcja **ograniczona**

$$\mathcal{T} = \{t_0, t_1, \dots, t_n\} \quad t_0 = a < t_1 < t_2 < \dots < t_{n-1} < t_n = b \quad I_i = [t_{i-1}, t_i] \quad |I_i| = t_i - t_{i-1}$$

↑ podział odcinka

SUMA GÓRNA

$$\overline{S}(f, \mathcal{T}) = \sum_{i=1}^n \sup_{x \in I_i} f(x) |I_i|$$

SUMA DOLNA

$$\underline{S}(f, \mathcal{T}) = \sum_{i=1}^n \inf_{x \in I_i} f(x) |I_i|$$

11:06

mathworld.wolfram.com/RiemannSum.html

Calculus and Analysis > Measure Theory >
Interactive Entries > webMathematica Examples >
Interactive Entries > Interactive Demonstrations >

Riemann Sum

Graph the Riemann sum of $x - 2x^3$ as x goes from -0.5 to 0.8 using 10 rectangles (Maximum).

Estimated Area = 0.0867762
Actual Area = 0.02148

Print estimated and actual areas? Rectangle Color: Light Gray Plot Color: Red

Step-by-step solutions for: $\int f(x) dx$ calculate

Let a closed interval $[a, b]$ be partitioned by points $a < x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1} < b$, where the lengths of the resulting intervals between the points are denoted $\Delta x_1, \Delta x_2, \dots, \Delta x_n$. Let x_k^* be an arbitrary point in the k th subinterval. Then the quantity

$$\sum_{k=1}^n f(x_k^*) \Delta x_k$$

is called a Riemann sum for a given function $f(x)$ and partition, and the value $\max \Delta x_k$ is called the **mesh size** of the partition.

If the limit of the Riemann sums exists as $\max \Delta x_k \rightarrow 0$, this limit is known as the Riemann integral of $f(x)$ over the interval $[a, b]$. The shaded areas in the above plots show the lower and upper sums for a constant mesh size.

11:08

mathworld.wolfram.com/RiemannSum.html

Calculus and Analysis > Measure Theory >
Interactive Entries > webMathematica Examples >
Interactive Entries > Interactive Demonstrations >

Riemann Sum

Graph the Riemann sum of $x - 2x^3$ as x goes from -0.5 to 0.8 using 10 rectangles (Minimum).

Estimated Area = -0.0509176
Actual Area = 0.02148

Print estimated and actual areas? Rectangle Color: Light Gray Plot Color: Red

Step-by-step solutions for: $\int f(x) dx$ calculate

Let a closed interval $[a, b]$ be partitioned by points $a < x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1} < b$, where the lengths of the resulting intervals between the points are denoted $\Delta x_1, \Delta x_2, \dots, \Delta x_n$. Let x_k^* be an arbitrary point in the k th subinterval. Then the quantity

$$\sum_{k=1}^n f(x_k^*) \Delta x_k$$

is called a Riemann sum for a given function $f(x)$ and partition, and the value $\max \Delta x_k$ is called the **mesh size** of the partition.

If the limit of the Riemann sums exists as $\max \Delta x_k \rightarrow 0$, this limit is known as the Riemann integral of $f(x)$ over the interval $[a, b]$. The shaded areas in the above plots show the lower and upper sums for a constant mesh size.

1.

CAŁKA RIEMANNA

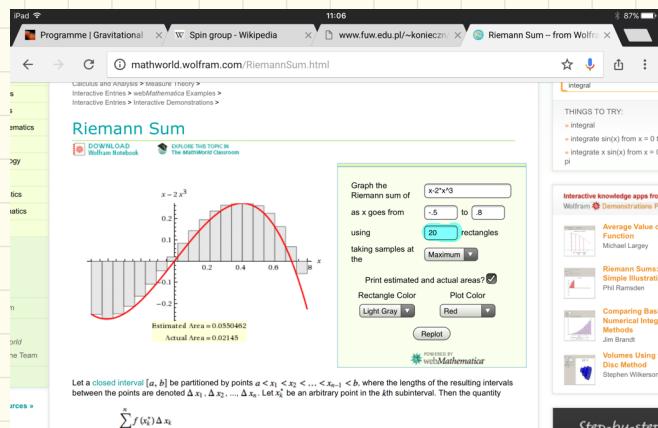
$[a, b] \subset \mathbb{R}$ odcinek **zawarty**, $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ funkcja **ograniczona**

$$\mathcal{T} = \{t_0, t_1, \dots, t_n\} \quad t_0 = a < t_1 < t_2 < \dots < t_{n-1} < t_n = b \quad I_i = [t_{i-1}, t_i] \quad |I_i| = t_i - t_{i-1}$$

podział odcinka

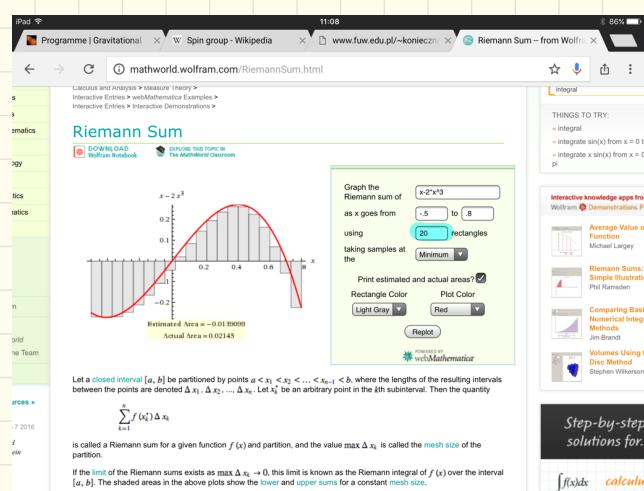
$$\overline{\mathcal{S}}(f, \mathcal{T}) = \sum_{i=1}^n \sup_{x \in I_i} f(x) |I_i|$$

SUMA GÓRNA



$$\underline{\mathcal{S}}(f, \mathcal{T}) = \sum_{i=1}^n \inf_{x \in I_i} f(x) |I_i|$$

SUMA DOLNA



1.

CAŁKA RIEMANNA

$[a, b] \subset \mathbb{R}$ odcinek **zawarty**, $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ funkcja **ograniczona**

$$\mathcal{T} = \{t_0, t_1, \dots, t_n\} \quad t_0 = a < t_1 < t_2 < \dots < t_{n-1} < t_n = b \quad I_i = [t_{i-1}, t_i] \quad |I_i| = t_i - t_{i-1}$$

podział odcinka

$$\overline{\mathcal{S}}(f, \mathcal{T}) = \sum_{i=1}^n \sup_{x \in I_i} f(x) |I_i|$$

SUMA GÓRNA

Programme | Gravitational Spin group - Wikipedia www.fuw.edu.pl/~konieczni Riemann Sum - from Wolfram

87%

Riemann Sum

Graph the Riemann sum of $x - 2x^3$ as x goes from -0.5 to 0.8 using 30 rectangles taking samples at the Maximum.

Print estimated and actual areas? Rectangle Color Light Gray Plot Color Red Replot

POWERED BY webMathematica

Let a closed interval $[a, b]$ be partitioned by points $a < x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1} < b$, where the lengths of the resulting intervals between the points are denoted $\Delta x_1, \Delta x_2, \dots, \Delta x_n$. Let x_k^* be an arbitrary point in the k th subinterval. Then the quantity

$$\sum_{k=1}^n f(x_k^*) \Delta x_k$$

is called a Riemann sum for a given function $f(x)$ and partition, and the value $\max \Delta x_k$ is called the **mesh size** of the partition.

If the limit of the Riemann sums exists as $\max \Delta x_k \rightarrow 0$, this limit is known as the Riemann integral of $f(x)$ over the interval $[a, b]$. The shaded areas in the above plots show the **lower** and **upper sums** for a constant mesh size.

$$\underline{\mathcal{S}}(f, \mathcal{T}) = \sum_{i=1}^n \inf_{x \in I_i} f(x) |I_i|$$

SUMA DOLNA

Programme | Gravitational Spin group - Wikipedia www.fuw.edu.pl/~konieczni Riemann Sum - from Wolfram

11:09

Riemann Sum

Graph the Riemann sum of $x - 2x^3$ as x goes from -0.5 to 0.8 using 30 rectangles taking samples at the Minimum.

Print estimated and actual areas? Rectangle Color Light Gray Plot Color Red Replot

POWERED BY webMathematica

Let a closed interval $[a, b]$ be partitioned by points $a < x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1} < b$, where the lengths of the resulting intervals between the points are denoted $\Delta x_1, \Delta x_2, \dots, \Delta x_n$. Let x_k^* be an arbitrary point in the k th subinterval. Then the quantity

$$\sum_{k=1}^n f(x_k^*) \Delta x_k$$

is called a Riemann sum for a given function $f(x)$ and partition, and the value $\max \Delta x_k$ is called the **mesh size** of the partition.

If the limit of the Riemann sums exists as $\max \Delta x_k \rightarrow 0$, this limit is known as the Riemann integral of $f(x)$ over the interval $[a, b]$. The shaded areas in the above plots show the **lower** and **upper sums** for a constant mesh size.

2.

Funkcja f jest ograniczona, ten $\sup_{x \in [a,b]} f(x)$, $\inf_{x \in [a,b]} f(x)$ są skonczone.

$$\inf_{x \in [a,b]} f(x) (b-a) \leq \underline{S}(f, \bar{\pi}) \leq \bar{S}(f, \bar{\pi}) \leq \sup_{x \in [a,b]} f(x) (b-a)$$

odwzorowanie $\pi \mapsto \underline{S}(f, \bar{\pi})$, $\pi \mapsto \bar{S}(f, \bar{\pi})$ są ograniczone. Istnieje więc

$$\sup_{\bar{\pi}} \underline{S}(f, \bar{\pi}) = \underline{\int} f$$

$[a,b]$

CAŁKA DOLNA

$$\inf_{\bar{\pi}} \bar{S}(f, \bar{\pi}) = \overline{\int} f$$

$[a,b]$

CAŁKA GÓRNA

DEFINICJA: Mówimy, że f jest całkowalna w sensie Riemanna na $[a, b]$

jeśli

$$\underline{\int}_{[a,b]} f = \overline{\int}_{[a,b]} f . \quad \text{Współną wartość oznaczamy} \quad \int_{[a,b]} f$$

Funkcja f jest ograniczona, ten $\sup_{x \in [a,b]} f(x)$, $\inf_{x \in [a,b]} f(x)$ są skonczone.

2.

$$\inf_{x \in [a,b]} f(x) (b-a) \leq \underline{S}(f, \bar{\pi}) \leq \bar{S}(f, \bar{\pi}) \leq \sup_{x \in [a,b]} f(x) (b-a)$$

odwzorowanie $\pi \mapsto \underline{S}(f, \bar{\pi})$, $\pi \mapsto \bar{S}(f, \bar{\pi})$ są ograniczone. Istnieje więc

$$\sup_{\bar{\pi}} \underline{S}(f, \bar{\pi}) = \underline{\int} f$$

CATKA DOLNA

$$\inf_{\bar{\pi}} \bar{S}(f, \bar{\pi}) = \bar{\int} f$$

CATKA GÓRNA

DEFINICJA: Mówimy, że f jest całkowalna

jeśli

$$\underline{\int}_{[a,b]} f = \bar{\int}_{[a,b]} f . \text{ Współwspółczynnik}$$

Catka zdefiniowana
można iść spać...



$[a, b]$

Policzyć jakąś całość z definicji

JAKIE FUNKCJE SĄ, CAŁKOWALNE?
opisać $\mathcal{P}([a,b])$

JAK PRAKTYCZNIE LICZYĆ CAŁKI?

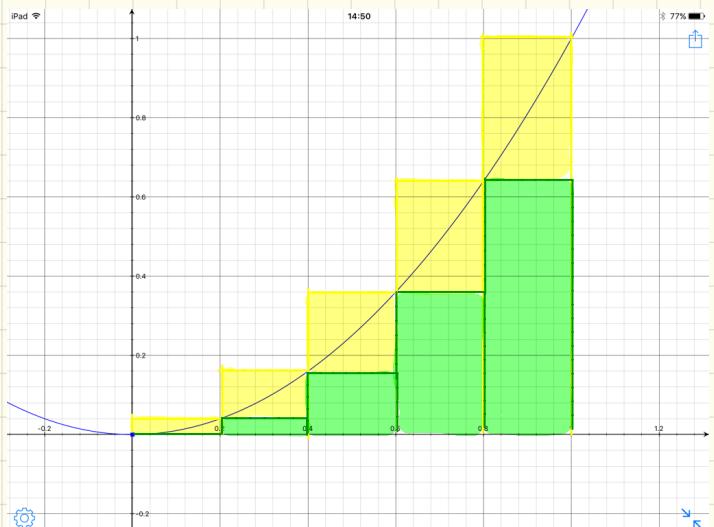
CO BĘDZIEMY ROBIĆ DALEJ?

Całki mierzącące
zbieżność
Całki z parametrem
Całka w \mathbb{R}^n

WŁASNOŚCI CAŁKI RIEMANNA

ZADANIE: korzystając z definicji policzyć $\int_0^1 f(x) = x^2$

4.



$$\mathcal{J}_n = \left\{ 0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \dots, \frac{n-1}{n}, 1 \right\}$$

$$\underline{\mathcal{S}}(f, \mathcal{J}_n) = \sum_{i=1}^n \left(\frac{i-1}{n}\right)^2 \cdot \frac{1}{n} = \frac{1}{n^3} \sum_{i=1}^n (i-1)^2 =$$

$$= \frac{1}{n^3} (1 + 2 + 3 + \dots + (n-1)^2)$$

$$\overline{\mathcal{S}}(f, \mathcal{J}_n) = \sum_{i=1}^n \frac{i^2}{n^2} \frac{1}{n} = \frac{1}{n^3} \sum_{i=1}^n i^2 =$$

$$= \frac{1}{n^3} (1 + 2 + \dots + n^2)$$

$$\overline{\mathcal{S}}(f, \mathcal{J}_n) - \underline{\mathcal{S}}(f, \mathcal{J}_n) = \frac{1}{n}$$

wiadomo, że $\forall \mathcal{J} \quad \underline{\mathcal{S}}(f, \mathcal{J}) \leq \underline{\int} f \leq \overline{\int} f \leq \overline{\mathcal{S}}(f, \mathcal{J})$

Ustalony $\varepsilon > 0$. Wiadomo, że istnieje n : $\frac{1}{n} < \varepsilon$, zatem

$\overline{\mathcal{S}}(f, \mathcal{J}_n) - \underline{\mathcal{S}}(f, \mathcal{J}_n) < \varepsilon$, w za tym idzie $\underline{\int}_I f - \overline{\int}_I f < \varepsilon$. Z dowolnością ε $\underline{\int}_I f = \overline{\int}_I f$

f jest więc całkowalne

5

$$\int_{\mathbb{I}} f = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^3} \sum_{k=1}^n k^2 = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^3} \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

To można wyprostać!

$$\sum_{i=0}^m i^3 = 0 + 1 + 2^3 + \dots + n^3 = A \quad B - A = (n+1)^3$$

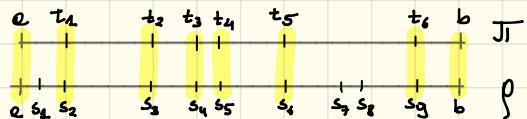
$$\sum_{i=0}^m (i+1)^3 = 1^3 + 2^3 + \dots + (m+n)^3 = B \quad \begin{aligned} \sum_{i=0}^m (i+1)^3 - i^3 &= \sum_{i=0}^m [(i+1) - i][(i+1)^2 + (i+1)i + i^2] = \sum (i^2 + 2i + 1 + i^2 + i^2) \\ &= 3 \sum_{i=0}^m i^2 + 3 \sum_{i=0}^m i + \sum_{i=0}^m 1 \end{aligned}$$

$$(n+m)^3 = m^3 + 3m^2 + 3m + 1 = 3 \sum_{i=1}^n i^2 + 3 \sum_{i=1}^n i + n + 1$$

$$\begin{aligned} 3 \sum_{i=1}^n i^2 &= m^3 + 3m^2 + 3m - 3 \frac{n(n+1)}{2} - m \quad 6 \sum_{i=1}^n i^2 = 2n^2 + 6n^2 + 6n - 3n^2 - 3n - 2n = \\ &= 2n^3 + 3n^2 + n = m(2n^2 + 3n + 1) = m(2n+1)(n+1) \end{aligned}$$

TWIERDZENIE f jest całkowalne na $[a, b]$ wtedy i tylko wtedy gdy dla dowolnego $\varepsilon > 0$ istnieje \overline{J} takie, że $\overline{S}(f, \overline{J}) - \underline{S}(f, \overline{J}) < \varepsilon$.

DEFINICJA Podział ρ jest drobniejszy niż π jeśli $\pi \subset \rho$



Relacja "bycie drobniejszym" jest częściowo porządkiem w zbiorze podziałów, tzn jest antysymetryczne i przekonduj

Dla każdych dwóch podziałów π , π' istnieje ρ pośredni między π , π' . Wystarczy wziąć $\rho = \pi \cup \pi'$.

STWIERDZENIE: Jeśli ρ drobniejszy niż π zachodzi

$$\underline{S}(f, \pi) \leq \underline{S}(f, \rho) \leq \bar{S}(f, \rho) \leq \bar{S}(f, \pi)$$

DOWÓD Oszacowyty.

WNIOSKI Każda suma dolna jest nie większa od każdej sumy górnej. Wobec tego wiele dolne jest nie większe od całki górnej.

DOWÓD TWIERDZENIA Jeśli f całkowalna na $[a, b]$ to $\underline{\int} f = \bar{\int} f$. Ustalmy $\epsilon > 0$ z definicji sup $\exists \pi: \underline{\int} f - \underline{S}(f, \pi) < \frac{\epsilon}{2}$ podobnie $\exists \pi': \bar{S}(f, \pi') - \bar{\int} f < \frac{\epsilon}{2}$

Takie same nierówności zachodzą dla $\rho = \pi \cup \pi'$. Wtedy $\bar{S}(f, \rho) - \underline{S}(f, \rho) < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$.

W drugą stronę dowód oczywisty, wynika z $\underline{S}(f, \pi) \leq \underline{\int} f \leq \bar{\int} f \leq \bar{S}(f, \pi)$.

JAKIE FUNKCJE SA, CAŁKOWALNE?

$\mathcal{R}([a,b])$

Całkowalne w sensie
Riemanna na $[a,b]$

7

STWIERDZENIE 1. $\mathcal{R}([a,b])$ jest podzestroniem
wektorowego $\text{Map}([a,b], \mathbb{R})$. Cała Riemanna
jest funkcjonalnym liniowym na $\mathcal{R}([a,b])$

DOWÓD: Niech $f, g \in \mathcal{R}([a,b])$, $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda > 0$ $\underline{\int}(\lambda f, \bar{J}) = \lambda \underline{\int}(f, \bar{J})$, $\bar{\int}(\lambda f, \bar{J}) = \lambda \bar{\int}(f, \bar{J})$
 wynika z tego, że $\underline{\int} \lambda f = \lambda \underline{\int} f$; $\bar{\int} \lambda f = \lambda \bar{\int} f$. Jeśli więc $f \in \mathcal{R}([a,b])$
 to $\underline{\int} \lambda f = \lambda \underline{\int} f = \lambda \bar{\int} f = \bar{\int} \lambda f$ więc $\underline{\int} \lambda f = \bar{\int} \lambda f = \int \lambda f$ tzn $(\lambda f) \in \mathcal{R}([a,b])$. ;
 $\int \lambda f = \lambda \int f$. Gdy $\lambda < 0$ mamy $\bar{\int}(\lambda f, \bar{J}) = \lambda \underline{\int}(f, \bar{J})$ oraz $\underline{\int}(\lambda f, \bar{J}) = \lambda \bar{\int}(f, \bar{J})$,
 dalej $\underline{\int} \lambda f = \lambda \bar{\int} f$, $\bar{\int} \lambda f = \lambda \underline{\int} f$... dalej oczywiste.

$$\bar{\int}(f+g, \bar{J}) = \sum_i \sup_{I_i} (f+g) |I_i| \leq \sum_i [\sup_{I_i}(f) + \sup_{I_i}(g)] |I_i| = \bar{\int}(f, \bar{J}) + \bar{\int}(g, \bar{J})$$

$$\underline{\int}(f+g, \bar{J}) = \sum_i \inf_{I_i} (f+g) |I_i| \geq \sum_i (\inf_{I_i}(f) + \inf_{I_i}(g)) |I_i| = \underline{\int}(f, \bar{J}) + \underline{\int}(g, \bar{J})$$

$$\underline{\int}(f, \bar{J}) + \underline{\int}(g, \bar{J}) \leq \underline{\int}(f+g, \bar{J}) \leq \bar{\int}(f+g, \bar{J}) \leq \bar{\int}(f, \bar{J}) + \bar{\int}(g, \bar{J})$$

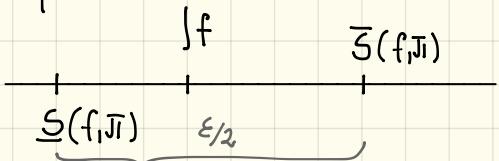
$$\underline{\int}(f, \overline{J}) + \underline{\int}(g, \overline{J}) \leq \underline{\int}(f+g, \overline{J}) \leq \overline{\int}(f+g, \overline{J}) \leq \overline{\int}(f, \overline{J}) + \overline{\int}(g, \overline{J})$$

8

Wózmy \overline{J} : $\overline{\int}(f, \overline{J}) - \underline{\int}(f, \overline{J}) < \frac{\varepsilon}{2}$ i $\overline{\int}(g, \overline{J}) - \underline{\int}(g, \overline{J}) < \frac{\varepsilon}{2}$ wtedy

$$\overline{\int}(f+g, \overline{J}) - \underline{\int}(f+g, \overline{J}) < \varepsilon \Rightarrow f+g \in R([a, b])$$

Dalej



\Rightarrow

$$\begin{aligned} \int f - \underline{\int}(f, \overline{J}) &< \frac{\varepsilon}{2} & \int g - \underline{\int}(g, \overline{J}) &< \frac{\varepsilon}{2} \\ \overline{\int}(f, \overline{J}) - \int f &< \frac{\varepsilon}{2} & \overline{\int}(g, \overline{J}) - \int g &< \frac{\varepsilon}{2} \end{aligned}$$

Podobnie dla g

$$\int(f+g) \leq \overline{\int}(f+g, \overline{J}) \leq \overline{\int}(f, \overline{J}) + \overline{\int}(g, \overline{J}) < \int f + \int g + \varepsilon$$

$$\int(f+g) \geq \underline{\int}(f+g, \overline{J}) \geq \underline{\int}(f, \overline{J}) + \underline{\int}(g, \overline{J}) > \int f + \int g - \varepsilon$$

$$\int f + \int g - \varepsilon < \int f+g < \int f + \int g + \varepsilon$$

\Downarrow

$$|\int f+g - (\int f + \int g)| < \varepsilon \Rightarrow \int f+g = \int f + \int g$$

■

STWIERDZENIE 2 Jeśli $f \in R([a,b])$, $F: J \rightarrow \mathbb{R}$ ciągła, jeśli $f([a,b]) \subset J$
 to $F \circ f \in R([a,b])$

DOWÓD

f ograniczone, ten $c = \inf f$, $d = \sup f$ są skończone, $[c,d] \subset J$.

$F|_{[c,d]}$ jako funkcja ciągła na zbiorze zamkniętym jest jednostajnie

ciągła ten dla $\varepsilon > 0 \exists \delta \forall y_1, y_2 \in [c,d] |y_1 - y_2| < \delta \Rightarrow |F(y_1) - F(y_2)| < \varepsilon$

Ustalmy $\varepsilon > 0$ i weźmy odpowiednio δ , można przyjąć $\delta < \varepsilon$. Weźmy $J \subset S(f, \bar{J}) - S(f, \bar{J}) < \delta^2$. Oznaczenie:

$$J = \{t_0, t_1, \dots, t_n\} I_i = [t_{i-1}, t_i] M_i = \sup_{I_i} f(x), m_i = \inf_{I_i} f(x) \tilde{M}_i = \sup_{I_i} F \circ f \tilde{m}_i = \inf_{I_i} F \circ f$$

$$K = \sup_{[c,d]} |F(y)| \quad \{0, 1, \dots, n\} = A \cup B$$

$$i \in A \Leftrightarrow M_i - m_i < \delta \quad i \in B \Leftrightarrow M_i - m_i \geq \delta$$

$$i \in A \Rightarrow \tilde{M}_i - \tilde{m}_i < \varepsilon$$

$$\tilde{S}(F \circ f, \bar{J}) - S(F \circ f, \bar{J}) = \sum_{i \in A \cup B} (\tilde{M}_i - \tilde{m}_i) |I_i|$$

10

$$\sum_{i \in A} (\tilde{M}_i - \tilde{m}_i) |I_i| < \sum_{i \in A} \varepsilon |I_i| < \varepsilon (b-a)$$

$$\delta \sum_{i \in B} |I_i| \leq \sum_{i \in B} (M_i - m_i) |I_i| \leq \bar{S}(f, \bar{J}) - \underline{S}(f, \bar{J}) < \delta^2$$

$M_i - m_i > \delta$ dla $i \in B$

$$\Rightarrow \delta \sum_{i \in B} |I_i| < \delta^2 \quad \sum_{i \in B} |I_i| < \delta$$

$$\bar{S}(F \circ f, \bar{J}) - \underline{S}(F \circ f, \bar{J}) = \sum_{i \in A} (\tilde{M}_i - \tilde{m}_i) |I_i| + \sum_{i \in B} (\tilde{M}_i - \tilde{m}_i) |I_i| \leq \varepsilon (b-a) + 2k\delta < \varepsilon (b-a) + 2K\varepsilon = \varepsilon ((b-a) + 2k)$$

$F \circ f$ jest więc całkowalne.

STWIERDZENIE 3 $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ $f(x) = x$ f jest całkowalne na każdym odcinku $[a, b]$

DOWÓD

Ustalmy $[a, b]$ i dzielmy \bar{J}_{1n} - podział $[a, b]$ na n równych części
 $t_0 = a, t_1 = a + \frac{b-a}{n}, \dots, t_n = b$

$$\bar{S}(f, \bar{J}) - \underline{S}(f, \bar{J}) = \sum_{i=1}^n \left(a + \frac{i(b-a)}{n} - \left(a + \frac{(i-1)(b-a)}{n} \right) \right) \frac{1}{n} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{n^2} (b-a) = \frac{1}{n} (b-a)$$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n: \frac{(b-a)}{n} < \varepsilon$$

WNIOSKI:

(i) z STW 2 i STW 3 wynika, że funkcje ciągłe są całkowalne.

$$F = F \circ id$$

\nearrow ciągłe \nwarrow całkowalne

(ii) Jeśli f, g całkowalne to $f+g, f-g$ są całkowalne: $f+g, f-g$ sp. całkowalne
z STW 1, $x \mapsto x^2$ jest ciągłe, dalej z STW 1 i STW 2:

$$fg = \frac{1}{4} ((f+g)^2 - (f-g)^2)$$

(iii) $x \mapsto |x|$ jest ciągłe, zatem jeśli f całkowalne, to $|f|$ całkowalne

Porównując odpowiednie sumy łatwo stwierdzić, że jeśli $f \leq g$ to $\int_a^b f \leq \int_a^b g$
zatem także $\int_a^b f \leq \int_a^b |f|$, wiadomo też, że $-\int_a^b f = \int_a^b (-f) \leq \int_a^b |f|$

zatem $\left| \int_a^b f \right| \leq \int_a^b |f|$

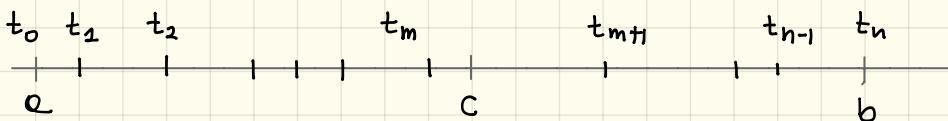
STWIERDZENIE 4 $f \in R([a, b]) \quad c \in]a, b[$. Wtedy $f|_{[a, c]} \in R([a, c])$
 $i \quad f|_{[c, b]} \in R([c, b])$. Ponadto

$$\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$$

12

DOWÓD:

$$f \in R([a, b]) \Rightarrow \exists \bar{J} : \bar{S}(f, \bar{J}) - \underline{S}(f, \bar{J}) < \varepsilon$$



Niech $\bar{J}_o = \bar{J} \cup \{c\}$. Wówczas \bar{J}_o jest drobniejszy niż \bar{J} i zachodzi

$$\bar{S}(f, \bar{J}_o) - \underline{S}(f, \bar{J}_o) < \varepsilon$$

$$\begin{array}{l} \bar{J}_1 = \{a, t_1, \dots, t_m, c\} \\ \text{pokrąca } [a, c] \end{array} \quad \begin{array}{l} \bar{J}_2 = \{c, t_{m+1}, \dots, b\} \\ \text{pokrąca } [c, b] \end{array}$$

$$S(f, \bar{J}) = S(f, \bar{J}_1) + S(f, \bar{J}_2)$$

$$\varepsilon > \bar{S}(f, \bar{J}_o) - \underline{S}(f, \bar{J}_o) = \underbrace{\bar{S}(f, \bar{J}_1)}_{\text{zielony}} + \underbrace{\bar{S}(f, \bar{J}_2)}_{\text{czerwony}} - \underbrace{\underline{S}(f, \bar{J}_1)}_{\text{zielony}} - \underbrace{\underline{S}(f, \bar{J}_2)}_{\text{czerwony}}$$

$$\varepsilon > \bar{S}(f, \overline{J}) - \underline{S}(f, \overline{J}) = \underbrace{\bar{S}(f, \overline{J}_1)}_{f|_{[a,c]} \in \mathcal{R}([a,c])} + \underbrace{\bar{S}(f, \overline{J}_2)}_{f|_{[c,b]} \in \mathcal{R}([c,b])} - \underline{S}(f, \overline{J}_1) - \underline{S}(f, \overline{J}_2)$$

↗ ↘

$$\bar{S}(f, \overline{J}_1) - \underline{S}(f, \overline{J}_1) < \varepsilon$$

$$\bar{S}(f, \overline{J}_2) - \underline{S}(f, \overline{J}_2) < \varepsilon$$

↙ ↘

$$13$$

RÓWNOŚĆ CAŁEK:

Ustalmy $\varepsilon > 0$

$$\text{Wierzymy } \overline{J}_1, \overline{J}_2 : \quad \bar{S}(f|_{[a,c]}, \overline{J}_1) \leq \int_{[a,c]} f + \frac{\varepsilon}{2} \quad \bar{S}(f|_{[c,b]}, \overline{J}_2) \leq \int_{[c,b]} f + \frac{\varepsilon}{2}$$

$$\text{dla } \overline{J} = \overline{J}_1 \cup \overline{J}_2 : \quad \bar{S}(f, \overline{J}) = \bar{S}(f|_{[a,c]}, \overline{J}_1) + \bar{S}(f|_{[c,b]}, \overline{J}_2) \leq \int_{[a,c]} f + \int_{[c,b]} f + \varepsilon \quad (*)$$

$$\text{Istnieje też g: } \bar{S}(f, \overline{J}) \leq \int_{[a,b]} f + \varepsilon \quad (**)$$

$$\frac{\bar{S}(f, \omega) - \varepsilon}{\int_{[a,b]} f}$$

$\nearrow \uparrow \nearrow$

$$\int_{[a,c]} f + \int_{[c,b]} f$$

$$\left| \int_{[a,b]} f - \left(\int_{[a,c]} f + \int_{[c,b]} f \right) \right| < \varepsilon$$

dla w drobniejszego od \overline{J} i g zachodzą obie nierówności

TWIERDZENIE (O WARTOŚCI ŚREDNIEJ)

$f, g \in \mathcal{R}([a, b])$ $g \geq 0$ ISTNIEJE $c \in \mathbb{R}$ TAKIE, ŻE

14

$$\inf_{[a,b]} f \leq c \leq \sup_{[a,b]} f \quad ; \quad \int_I f \cdot g = c \int_I g$$

DOWÓD: $m = \inf_{[a,b]} f$, $M = \sup_{[a,b]} f$ $m \leq f(x) \leq M \Rightarrow mg(x) \leq f(x)g(x) \leq Mg(x)$
 bo $g(x) > 0$

$$m \int_I g \leq \int_I fg \leq M \int_I g \quad : \int_I g$$

A CO JEST SIĘ $\int_I g = 0$?

$$m \leq \left(\int_I g \right)^{-1} \int_I fg \leq M$$

Wtedy $g=0$, $\int_I fg=0$ i c DOWOLNE!

$$c = \left(\int_I g \right)^{-1} \int_I fg \Rightarrow \int_I fg = c \int_I g$$

WNIOSKI: (1) JEŚLI f CIĄGŁA, TO $\exists \xi \in [a, b] : f(\xi) = c$

$$\int_{[a,b]} fg = f(\xi) \int_{[a,b]} g$$

15

(2) f CIĄGŁA, $g(x) = 1$: $\int_{[a,b]} f = f(\xi)(b-a)$

TWIERDZENIE: PODSTAWOWE R.R. i C.

JEŚLI f JEST CIĄGŁA NA $[a, b]$ TO $F(x) = \int_{[a,x]} f$ JEST RÓŻNICZKOWALNA I

$$F'(x) = f \text{ DLA } x \in]a, b[$$

DOWÓD:

$$h > 0$$

TH. O WARTOŚCI ŚREDNIEJ

$$\frac{1}{h} [F(x+h) - F(x)] = \frac{1}{h} \left[\int_{[a,x+h]} f - \int_{[a,x]} f \right] = \frac{1}{h} \int_{[x,x+h]} f = \frac{1}{h} f(\xi(h)) \cdot h$$

$\xi(h) \in [x, x+h]$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} f(\xi(h)) = f(x)$$

$\xi(h) \rightarrow x$ DLA $h \rightarrow 0$

PODOBNE DLA $h < 0$

NNIOSEK: JESLI G JEST FUNKCJA, PIERWOTNA, DLA CIAGŁEJ FUNKCJI f

TO $\int_{[a,b]} f = G(b) - G(a)$

16

DOWÓD: Z P.T.R.R.iC. WIADOMO, ŻE $F(x) = \int_{[a,x]} f$ JEST FUNKCJA,
PIERWOTNA, ZATEM

$$G(x) = F(x) + C$$

↑
STAŁA

$$G(x) = \int_{[a,x]} f + C$$

$$x = a : G(a) = C$$

$$x = b : G(b) = \int_{[a,b]} f + C$$



$$\int_{[a,b]} f = G(b) - C = G(b) - G(a)$$