

PODSTAWOWE TWIERDZENIE RACHUNKU RÓŻNICZKOWEGO I CAŁKOWEGO

Jeżeli $f \in \mathcal{R}([a, b])$ to $F(x) = \int_a^x f(t) dt$ jest ciągła. Jeżeli f jest ciągła, to F jest różniczkowalna i ponadto $F'(x) = f(x)$

WNIOSEK:

Jeżeli f jest ciągła na $[a, b]$ i G jest funkcją pierwotną dla f to

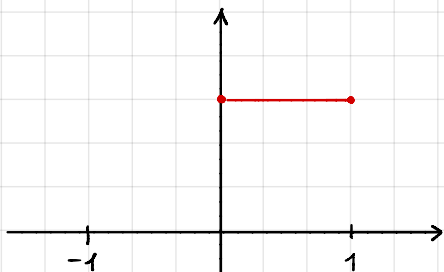
$$\int_a^b f(t) dt = G(b) - G(a)$$

UWAGA: Czy punkty nieciągłości f przeszkadzają?

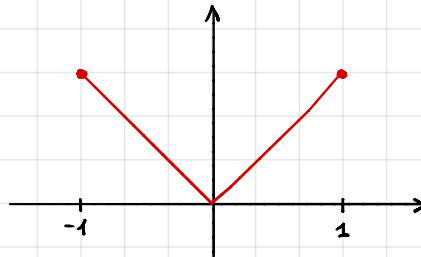
$$f: [-1, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$F(x) = |x|$$

$$f(x) = \begin{cases} -1 & x < 0 \\ 1 & x \geq 0 \end{cases}$$



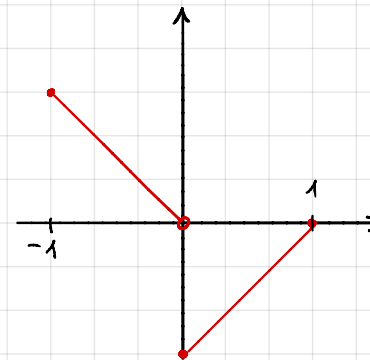
$$\int_{-1}^1 f(t) dt = 0$$



funkcja F jest
ciągła

$$F(1) - F(-1) = 1 - 1 = 0$$

$$G(x) = \begin{cases} -x & x < 0 \\ x - 1 & x \geq 0 \end{cases}$$



Funkcja G nie jest ciągła

$$G(1) - G(-1) = 0 - 1 = -1 \neq 0$$

PODSTAWOWE TWIERDZENIE RACHUNKU RÓŻNICZKOWEGO I CAŁKOWEGO

Jeżeli $f \in \mathcal{R}([a, b])$ to $F(x) = \int_a^x f(t) dt$ jest ciągła. Jeżeli f jest ciągła, to F jest różniczkowalna i ponadto $F'(x) = f(x)$

WNIOSEK:

Jeżeli f jest ciągła na $[a, b]$ i G jest funkcją pierwotną dla f to

$$\int_a^b f(t) dt = G(b) - G(a)$$

UWAGA: Czy punkty nieciągłości f przeszkadzają?

$$f: [-1, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$F(x) = |x|$$

$$G(x) = \begin{cases} -x & x < 0 \\ x-1 & x \geq 0 \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} -1 & x < 0 \\ 1 & x \geq 0 \end{cases}$$



TWIERDZENIE

JEŚLI f MA SKOŃCZONĄ LICZBĘ PUNKTÓW NIECIĄGŁOŚCI W $[a, b]$

i F JEST FUNKCJĄ, PIERWOTNĄ DLA f (TZN $F'(x) = f(x)$ TAM

GDZIE F RÓŻNICZKOWALNA) i F CIĄGŁA

$$\int_{-1}^1 f(t) dt = 0$$

$$F(1) - F(-1) = 1 - 1 = 0$$

$$G(1) - G(-1) = 0 - 1 = -1 \neq 0$$

je

CAŁKOWANIE PRZEZ CZĘŚCI I PODSTAWIENIE

TWIERDZENIE: $f, g, F, G \in C([a, b])$, $F' = f$, $G' = g$

$$\int_a^b F(t)g(t)dt = F(b)G(b) - F(a)G(a) - \int_a^b f(t)G(t)dt \quad (*)$$

DOWÓD: ZAŁOŻENIA O CIĄGŁOŚCI f, g POZWALAJĄ KORZYSTAĆ Z P.T.R.R.C.

WIADOMO, ŻE $\int_a^b (FG)'(t)dt = F(b)G(b) - F(a)G(a)$ ORAZ

$$\int_a^b (FG)'(t)dt = \int_a^b f(t)G(t)dt + \int_a^b F(t)g(t)dt. \text{ PROSTY RACHUNEK PROWADZI DO } (*)$$

TWIERDZENIE: $\mathbb{R} \supset I \supset [a, b]$, $f \in C([a, b])$ $\varphi \in C^1(I)$ φ ŚCIŚLE MONOTONICZNA

NA $[a, b]$. WTEDY

$$\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(y)dy = \int_a^b f \circ \varphi(x) \varphi'(x) dx$$

DOWÓD: NIECH F BĘDZIE FUNKCJĄ PIERWOTNĄ DO f . ZGODNIE Z PTRRC F JEST CIĄGŁA. FUNKCJĄ PIERWOTNĄ DO $x \mapsto (f \circ \varphi)(x) \varphi'(x)$ JEST $F \circ \varphi$.

TWIERDZENIE: $\mathbb{R} \supset I \supset [a, b]$, $f \in C([a, b])$ $\varphi \in C^1(I)$ φ ŚCIŚLE MONOTONICZNA NA $[a, b]$. WTEDY

$$\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(y) dy = \int_a^b f \circ \varphi(x) \varphi'(x) dx$$

DOWÓD: NIECH F BĘDZIE FUNKCJĄ PIERWOTNĄ DO f . ZGODNIE Z PTRRC F JEST CIĄGŁĄ. FUNKCJĄ PIERWOTNĄ DO $x \mapsto (f \circ \varphi)(x) \varphi'(x)$ JEST $F \circ \varphi$.

ISTOTNIE $(F \circ \varphi)'(x) = F'(\varphi(x)) \varphi'(x) = (f \circ \varphi)(x) \varphi'(x)$. Z ZAŁOŻEŃ WYNIKA PONADTO, ŻE $(f \circ \varphi) \cdot \varphi'$ CIĄGŁA

$$\int_a^b (f \circ \varphi)(x) \varphi'(x) dx = (F \circ \varphi)(b) - (F \circ \varphi)(a) = F(\varphi(b)) - F(\varphi(a)) = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(y) dy$$

WARUNEK MONOTONICZNOŚCI φ POTRZEBNY JEST DO TEGO,

ŻEBY $\varphi([a, b]) = [\varphi(a), \varphi(b)]$ (Z DOKŁADNOŚCIĄ DO KOLEJNOŚCI $\varphi(a)$ I $\varphi(b)$).

BARDZO WAŻNY PRZYKŁAD

5.

DEFINIUJEMY FUNKCJĘ $u(x) = \int_1^x \frac{dt}{t}$ DLA $x > 0$. FUNKCJA $t \mapsto \frac{1}{t}$ JEST CIĄGŁA NA $]0, +\infty[$, WIĘC u JEST RÓŻNICZKOWALNA. PONIEWAŻ $t \mapsto \frac{1}{t}$ JEST KLASY C^∞ NA $]0, +\infty[$

PODOBNIE JEST Z u

$$a > 0 \quad u(ax) = \int_1^{ax} \frac{1}{t} dt = \int_1^a \frac{1}{t} dt + \int_a^{ax} \frac{1}{t} dt = u(a) + \int_1^x \frac{1}{ay} dy = u(a) + u(x)$$

$\uparrow t=ay \quad dt = a dy$

$$u(ax) = u(a) + u(x)$$

$u'(x) = \frac{1}{x}$ $x \mapsto \frac{1}{x}$ PRZYJMUJE WARTOŚCI DODATNIE, WIEC u JEST ROSNĄCA

$\begin{cases} u(2^n) = n u(2) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty & u(1) = 0, \quad]0, \infty[\subset \text{im } u \\ 0 = u(1) = u\left(x \cdot \frac{1}{x}\right) = u(x) + u\left(\frac{1}{x}\right), \text{ TZN. } u\left(\frac{1}{x}\right) = -u(x), \text{ ZATEM }]-\infty, 0] \subset \text{im } u \end{cases}$
 $\rightarrow \text{im } u = \mathbb{R}$ i u JEST BIJEKCJA.

$u'(x) \neq 0$, ZATEM FUNKCJA ODWROTNA JEST RÓŻNICZKOWALNA.

$$\eta: \mathbb{R} \rightarrow]0, \infty[\quad : \quad \eta(u(x)) = x \quad \eta'(y) = \frac{1}{u'(\eta(y))} = \frac{1}{1/\eta(y)} = \eta(y)$$

$$\eta'(y) = \eta(y)$$

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{u(1+t)}{t} \stackrel{H}{=} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{1+t}}{1} = 1 \quad \text{WEZMY} \quad t = \frac{x}{n}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u(1+\frac{x}{n})}{\frac{x}{n}} = 1 = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{n}{x} u(1+\frac{n}{x})}{\frac{n}{x}} = \frac{1}{x} \lim_{n \rightarrow \infty} u\left(\left[1+\frac{x}{n}\right]^n\right) = \frac{1}{x} u\left(\lim_{n \rightarrow \infty} \left[1+\frac{x}{n}\right]^n\right) = \frac{1}{x} u(e(x))$$

$$1 = \frac{1}{x} u(e(x)) \quad x = u(e(x)) \quad \text{tzn} \quad \eta(x) = e(x)$$

WPROWADZILIŚMY JUŻ OZNACZENIA $e(x) = \exp(x)$ $e = \exp(1)$. ARGUMENTOWALIŚMY, ŻE $\exp(\frac{m}{n}) = e^{m/n}$. FUNKCJĘ u OZNACZAMY $u(x) =: \log x$ lub $u(x) = \ln x$

DEFINIUJEMY DLA $a > 0$ $a^x = \exp(x \log a)$, WTEDY $\exp(x) = e^x$ DLA DOWOLNEGO $x \in \mathbb{R}$.

NIEWŁAŚCIWA CAŁKA RIEMANNA

7.

PRZYKŁADY:

$$\int_0^{\infty} x e^{-x} dx = -x e^{-x} \Big|_0^{\infty} + \int_0^{\infty} e^{-x} dx = 0 - e^{-x} \Big|_0^{\infty} = 0 - (-1) = 1$$

$u(x) = x$ $v'(x) = e^{-x}$
 $u'(x) = 1$ $v(x) = -e^{-x}$

CO LICZYMY?

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_0^R x e^{-x} dx$$

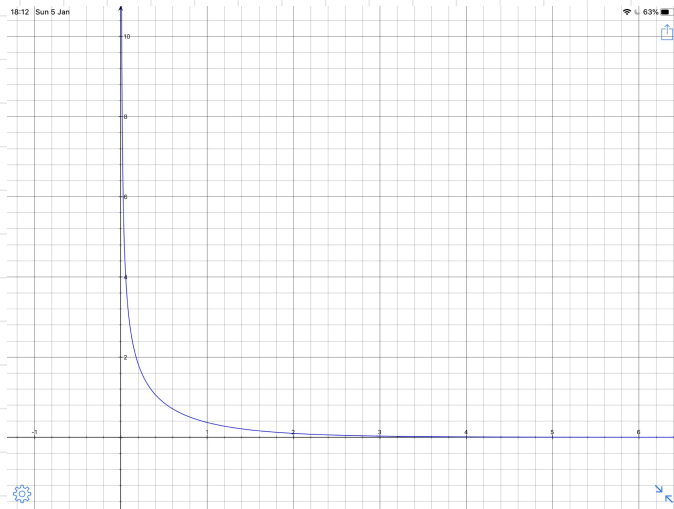
$$\int_0^{\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} e^{-x} dx = \int_0^{\infty} 2 e^{-t^2} dt = \sqrt{\pi}$$

$t = \sqrt{x}$ $dt = \frac{dx}{2\sqrt{x}}$

$$x \mapsto \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}}$$

NIE JEST OGRANICZONA
NA $[0, \infty[$?

ODCINEK PO KTÓRYM
CAŁKUJEMY NIE JEST
ZWARTY ?



TO CO LICZYMY TO:

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\alpha}^R \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}} dx$$

CATKA NIEWŁAŚCIWA OZNACZA CATKĘ PO ZBIORACH NIEZWARTYCH. PROBLEM POTRAKTUJEMY DOŚĆ OGÓLNIE - JEST TO INWESTYCJA W PRZYSZŁOŚĆ, TZN. PRZYDA SIĘ PRZY CATCE PO ZBIORACH W $\mathbb{R}^n$

W DALSZYM CIĄGU I BĘDZIE OZNACZAĆ $]a, b[$, $] -\infty, a[$, $]a, +\infty[$, EWENTUALNIE DOMKNIĘTE NA KTÓRYMS KOŃCU.

DEFINICJA: RELACJA, SKIEROWANIA NAZYWAMY RELACJĘ $>$ W ZBIORZE A

(1) ZWROTNA: $\forall a \in A \quad a > a$

(2) PRZECHODNIA: $\forall a, b, c \in A \quad a > b \text{ i } b > c \Rightarrow a > c$

(3) $\forall a, b \in A \quad \exists c: c > a \text{ i } c > b.$

PRZYKŁADY:

(1) RELACJA „BYCIA DROBNIEJSZYM” W ZBIORZE PODZIAŁÓW

(2) RELACJA ZAWIERANIA W ZBIORZE PODZBIORÓW USTALONEGO ZBIORU

DEFINICJA: $(A, >)$ - ZBIÓR SKIEROWANY

$\swarrow$ ZBIÓR $\nwarrow$ RELACJA SKIEROWANIA W A

DEFINICJA: $(A, >)$ $\varphi: A \rightarrow \mathbb{R}$

$\nearrow$ CIĄG UOGÓLNIONY

DEFINICJA: CIĄG UOGÓLNIONY

$\varphi: A \rightarrow \mathbb{R}$ JEST ZBIEŻNY, JEŚLI ISTNIEJE $\phi \in \mathbb{R}$ TAKIE, ZE

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists a \in A \quad \forall b > a \quad |\varphi(b) - \phi| < \varepsilon$$

PRZYKŁAD: π - ZBIÓR PODZIAŁÓW ODCINKA

$>$ - RELACJA BYCIA DROBNIEJSZYM

$$\underline{S} : \pi \rightarrow \mathbb{R} \quad \underline{S}(\pi) = \sum_i |I_i| \inf_{I_i} f(x)$$

$$\int f = \lim_{>} \underline{S}$$

O ZBIEZNOŚCI: DLA CIĄGÓW UOGÓLNIONYCH PRAWDZIWE SĄ:

- MONOTONICZNY I OGRANICZONY CIĄG UOGÓLNIONY JEST ZBIEZNY
- RZECZYWISTY CIĄG UOGÓLNIONY ZBIEZNY JEST CAUCHY'EGO
- RZECZYWISTY UOGÓLNIONY CIĄG CAUCHY'EGO JEST ZBIEZNY
- ⋮

I - ODCINEK, $\mathcal{K}(I)$ - **ODCINKI** ZWARTE ZAWARTE W I ($\mathcal{K}(I), \subset$) - ZBIÓR SKIEROWANY
 $f \in \mathcal{R}(K)$ DLA WSZYSTKICH $K \in \mathcal{K}(I)$, $\Phi_K(f) = \int_K f$

DEFINICJA: MÓWIMY, ZE f JEST CAŁKOWALNA NA I (LUB, ZE $\int_I f$ JEST ZBIEZNA) JEŚLI ISTNIEJE $\lim_{\subset} \Phi_K(f) = \int_I f$

STWIERDZENIE (KRYTERIUM PORÓWNAWCZE)

10.

NIECH $f, g : I \rightarrow \mathbb{R}$ BĘDĄ NIEUJEMNE I CAŁKOWALNE NA KAŻDYM $K \in \mathcal{K}(I)$
JEŚLI $f \leq g$ TO Z CAŁKOWALNOŚCI g WYNIKA CAŁKOWALNOŚĆ f .

DOWÓD

JEŚLI $\int_I g$ ZBIEŻNA TO $K \mapsto \int_K g$ JEST NIEMALEJĄCYM
ZBIEŻNYM CIĄGIEM UOGÓLNIONYM Z GRANICĄ $\int_I g$.

$$\forall K \quad \int_K f \leq \int_K g \leq \int_I g, \text{ TZN } K \mapsto \int_K f \text{ JEST OGRANICZONY I}$$

MONOTONICZNY, WIĘC ZBIEŻNY ■

DEFINICJA: MÓWIMY, ŻE $\int_I$ JEST BEZWZGLĘDNIE ZBIEŻNA, JEŚLI
 $\int_I |f|$ JEST ZBIEŻNA.

DEFINICJA: JEŚLI $\int_I f$ JEST ZBIEŻNA A $\int_I |f|$ NIE JEST ZBIEŻNA
TO ZBIEŻNOŚĆ $\int_I$ NAZYWAMY WARUNKOWĄ.

STWIERDZENIE: JEŚLI $\int_I |f|$ ZBIEŻNA TO $\int_I f$ ZBIEŻNA

11.

DOWÓD:

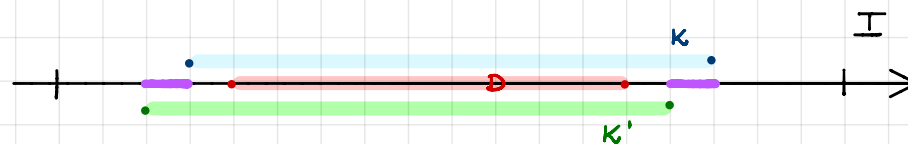
POKAZEMY, ŻE $K \mapsto \int_K f$ JEST CIĄGIEM CAUCHY'EGO.

WIADOMO, ŻE $K \mapsto \int_K |f|$ JEST CIĄGIEM CAUCHY'EGO, BO $\int_I |f|$ ZBIEŻNA

USTALMY $\varepsilon > 0$ I WEŹMY $D \in \mathcal{K}(I)$ TAKIE, ŻE

$$\left| \int_K |f| - \int_{K'} |f| \right| < \varepsilon \quad \text{DLA} \quad K, K' \in \mathcal{K}(I) \quad D \subset K \text{ i } D \subset K'$$

$\pm f$, W ZALEŻNOŚCI OD
POTRZEB



$$J = \overline{K - K'} = \overline{K \setminus (K \cap K')} \cup \overline{K' \setminus (K \cap K')} \quad D \subset K \cap K'$$

$$\left| \int_K f - \int_{K'} f \right| = \left| \int_J \tilde{f} \right| \leq \int_J |f| = \int_{\overline{K \setminus (K \cap K')}} |f| + \int_{\overline{K' \setminus (K \cap K')}} |f| \leq \int_{K \setminus D} |f| + \int_{K' \setminus D} |f| =$$

$$= \underbrace{\int_K |f| - \int_D |f|}_{< \varepsilon} + \underbrace{\int_{K'} |f| - \int_D |f|}_{< \varepsilon} < 2\varepsilon \quad \blacksquare$$

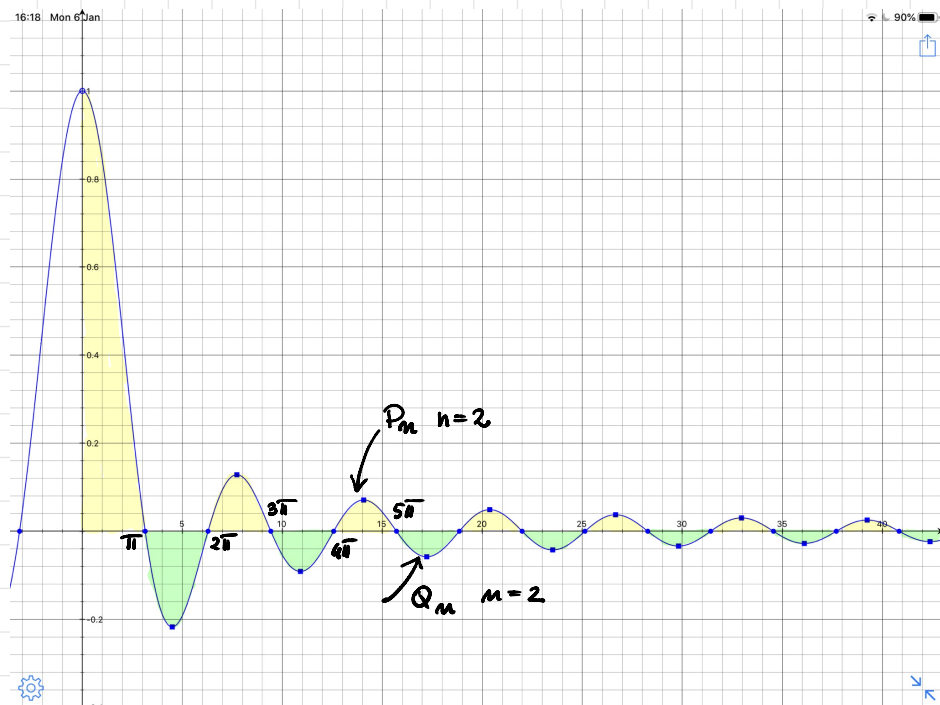
CAŁKA DIRICHLETA

ZADANIE POLEGA NA ZBADANIU ZBIEŻNOŚCI WARUNKOWEJ I BEZWZGLĘDNEJ CAŁKI

12.

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx$$

FUNKCJA $f: x \mapsto \frac{\sin x}{x}$ FORMALNIE NIE JEST OKREŚLONA W $x=0$, ALE $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1$, ZATEM CAŁKOWAĆ MOŻNA PO $[0, +\infty[$. ROZWAŻAMY $\mathcal{K}([0, \infty[)$ W SZCZEGÓLNOŚCI PRZYJADZĄ SIĘ $[0, R]$.



RACHUNKI POMOCNICZE:

$$P_m = \int_{2n\pi}^{(2n+1)\pi} \frac{\sin x}{x} \quad \left(\frac{\sin x}{(2n+1)\pi} \leq \frac{\sin x}{x} \leq \frac{\sin x}{2n\pi} \right)$$

$$\int_0^{\pi} \sin x dx = -\cos x \Big|_0^{\pi} = -(-1) + 1 = 2$$

$$\frac{2}{(2n+1)\pi} \leq P_m \leq \frac{1}{n\pi}$$

$$Q_m = \int_{(2n+1)\pi}^{(2n+2)\pi} \frac{\sin x}{x} dx \quad \left(\frac{\sin x}{(2n+1)\pi} \leq \frac{\sin x}{x} \leq \frac{\sin x}{(2n+2)\pi} \right)$$

$$-\frac{2}{(2n+1)\pi} \leq Q_m \leq -\frac{1}{(n+1)\pi}$$

WŁĄD DO CAŁKI OD $[2n\pi, (2n+2)\pi]$ to $P_m + Q_m$

$$0 \leq P_m + Q_m \leq \frac{1}{n\pi} - \frac{1}{(n+1)\pi} = \frac{1}{\pi} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right)$$

WKŁAD DO CAŁKI OD $[2n\pi, (2n+2)\pi]$ to $P_m + Q_n$

$$0 \leq P_m + Q_n \leq \frac{1}{n\pi} - \frac{1}{(n+1)\pi} = \frac{1}{\pi} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right)$$

WKŁAD DO CAŁKI OD $[2n\pi, 2m\pi]$ $m > n$

$$0 \leq \sum_{k=n}^{m-1} P_k + Q_k \leq \frac{1}{\pi} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{m} \right)$$



NIECH $R > r$ SZACUJEMY

$$\left| \int_0^R \frac{\sin x}{x} dx - \int_0^r \frac{\sin x}{x} dx \right| = \left| \int_r^R \frac{\sin x}{x} dx \right| = |D_1 + D_2 + D_3| \leq \frac{1}{\pi(m-1)}$$

MAMY OSZACOWANE

$$-\frac{2}{(2n-1)\pi} \leq D_1 \leq \frac{1}{\pi} \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} \right)$$

$$0 \leq D_3 \leq \frac{1}{m\pi}$$

$$0 \leq D_2 \leq \frac{1}{\pi} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{m} \right)$$

$$-\frac{1}{(m-\frac{1}{2})\pi} \leq D_1 + D_2 + D_3 \leq \frac{1}{\pi(m-1)}$$

USTALMY $\varepsilon > 0$ i WYBIERZMY $N \in \mathbb{N}$ TAKIE,

ZE $\frac{1}{\pi(N-1)} < \varepsilon$. WTEDY DLA WSZYSTKICH

$K, K' \in \mathcal{K}(I)$ PÓŹNIEJSZYCH NIŻ $[0, 2\pi N]$

$$\left| \int_K \frac{\sin x}{x} dx - \int_{K'} \frac{\sin x}{x} dx \right| \leq \frac{1}{\pi(n-1)} < \frac{1}{\pi(N-1)} < \varepsilon$$

↑
N ODPWIEDNIE DO
 K, K' ALB $> N$

$K \mapsto \int_K \frac{\sin x}{x} dx$ JEST CIĄGIEM CAUCHY'EGO,
WIEC JEST ZBIEŻNY.