

Niech I, J będą odcinkami w $\mathbb{R}$. W kontekście niewłaściwej całki Riemanna prawdziwe są następujące stwierdzenia:

STWIERDZENIE 1 Jeśli $\int_I f$ i $\int_I g$ są zbieżne to także $\int_I \alpha f + \beta g$ jest zbieżna; $\int_I \alpha f + \beta g = \alpha \int_I f + \beta \int_I g$; $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

STWIERDZENIE 2 Jeśli $\int_I f$ jest zbieżne bezwzględnie to $|\int_I f| \leq \int_I |f|$.

STWIERDZENIE 3 Jeśli $I \cap J \neq \emptyset$ to $\int f$ jest zbieżna wtedy i tylko wtedy gdy $\int_I f$ i $\int_J f$ są zbieżne. Gdy $I \cap J$ jest zbiorem jednopunktowym zachodzi równość $\int_{I \cup J} f = \int_I f + \int_J f$.

BADANIE ZBIEŻNOŚCI CAŁEK NIEWŁAŚCIWYCH: Najważniejsze i najczęściej stosowane dla funkcji dodatnich jest kryterium porównawcze o którym mówiliśmy w poprzednim wykładzie. Można je zapisać w alternatywnej formie: $f, g > 0$ Jeśli istnieje $c > 0$ takie że $\frac{f(x)}{g(x)} \leq c$ dla $x \in I \setminus K$, $K \in \mathcal{K}(I)$ to z całkowalności g na I wynika całkowalność f na I . Jeśli istnieje $d > 0$ takie że $\frac{f(x)}{g(x)} \geq d$ dla $x \in I \setminus K$ to z rozbieżności $\int_I g$ wynika rozbieżność $\int_I f$.

Jeśli $I = [a, +\infty[$, ten sam fakt można zapisać inaczej: Jeśli istnieje $l = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)}$ to z całkowalności g wynika całkowalność f . Jeśli $l > 0$ to z rozbieżności $\int_I g$ wynika rozbieżność $\int_I f$.

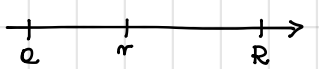
Dla funkcji nie będących stałego znaku mamy dwie kryteria całkowalności.

TWIERDZENIE (KRYTERIUM ABELA) $I = [a, +\infty[$, $\int_I f$ zbieżne, g monotoniczne i ograniczone na I . Wówczas $\int_I fg$ jest zbieżne.

TWIERDZENIE (KRYTERIUM DIRICHLETA) $I = [a, +\infty[$, $F(x) = \int_a^x f(t) dx$ ograniczona dla $t \in I$, g monotoniczne na I oraz $\lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = 0$. Wówczas $\int_I fg$ jest zbieżne.

LEMAT (WZÓR BONNETA) $f, g \in \mathcal{R}([a, b])$, g monotoniczne. Istnieje $\xi \in]a, b[$:

$$\int_{[a, b]} fg = g(a) \int_{[a, \xi]} f + g(b) \int_{[\xi, b]} f.$$

DOWÓD (K.A.)  z lematu $\int_{[r, R]} fg = g(r) \int_{[r, \xi]} f + g(R) \int_{[\xi, R]} f$. Funkcja g jest ograniczona, zatem $\exists C: |g(r)| < C, |g(R)| < C$.

$|\int_{[r, R]} fg| \leq |g(r)| |\int_{[r, \xi]} f| + |g(R)| |\int_{[\xi, R]} f| \leq C (|\int_{[r, \xi]} f| + |\int_{[\xi, R]} f|)$ f jest całkowna, dlatego dla wystarczająco dużych r $\int_{[r, \xi]} f$ oraz $\int_{[\xi, R]} f$ jest dowolnie małe. Ciąg $K \mapsto \int_K f$ jest bowiem ciągiem Cauchy'ego. Całka $\int_{[r, R]} fg$ jest więc też dowolnie mała dla wystarczająco dużych r , co pokazuje, że ciąg $K \mapsto \int_K fg$ jest ciągiem Cauchy'ego. fg jest więc całkowna.

DOWÓD (K.D.) Skorzystamy ten sam wzór $\int_{[r, R]} fg = g(r) \int_{[r, \xi]} f + g(R) \int_{[\xi, R]} f$ dla $r \rightarrow \infty$ także $R \rightarrow \infty$ i $g(R) \rightarrow 0$.
 Podobnie jak poprzednio $\int_{[r, R]} fg$ jest dla dużych r dowolnie małe, zatem fg jest całkowna.

Pozostaje nam udowodnienie lematu:

DOWÓD LEMATU: ① Udowodnimy najpierw, że jeśli $f, g \in \mathcal{R}([a, b])$, $g \geq 0$, g mierzalna to istnieje $\xi \in [a, b]$ takie, że $\int_a^b fg = g(\xi) \int_a^b f$.

W tym celu weźmy podział π odcinka $[a, b]$, $\pi = \{t_0 = a, t_1, \dots, t_n = b\}$ i zapiszmy

$$\int_{[a, b]} fg = \sum_i \int_{[t_{i-1}, t_i]} fg = \sum_i \int_{D_i} (g - g(t_{i-1}) + g(t_{i-1}))f = \sum_i \underbrace{\int_{D_i} (g - g(t_{i-1}))f}_{S_1} + \sum_i \underbrace{\int_{D_i} g(t_{i-1})f}_{S_2} =$$

$$S_1 = \sum_i \int_{D_i} (g - g(t_{i-1}))f \quad |S_1| = \left| \sum_i \int_{D_i} (g - g(t_{i-1}))f \right| \leq \sum_i \int_{D_i} |g - g(t_{i-1})f| \leq \sup_{[a, b]} f \sum_i \int_{D_i} |g - g(t_{i-1})|$$

$$\leq \sup_{[a, b]} f \underbrace{\sum_i |g(t_i) - g(t_{i-1})| |D_i|}_{\overline{\sigma}(g, \pi) - \underline{\sigma}(g, \pi)} = \sup_{[a, b]} f (\overline{\sigma}(g, \pi) - \underline{\sigma}(g, \pi))$$

ze względu na całkowalność g tę sumę można wziąć dowolnie małą.

$$S_2 = \sum_i \int_{D_i} g(t_{i-1})f = \sum_i g(t_{i-1}) [F(t_i) - F(t_{i-1})] =$$

$$F(t) = \int_a^t f, \quad F \text{ ciągła}$$

$$= g(a) [F(t_1) - F(a)] + g(t_1) [F(t_2) - F(t_1)] + g(t_2) [F(t_3) - F(t_2)] + \dots + g(t_{n-1}) [F(b) - F(t_{n-1})] =$$

$$= g(a) F(t_1) - g(a) F(a) + g(t_1) F(t_2) - g(t_1) F(t_1) + g(t_2) F(t_3) - g(t_2) F(t_2) + \dots + g(t_{n-1}) F(b) - g(t_{n-1}) F(t_{n-1}) =$$

$$= -g(a) F(a) + F(t_1) [g(a) - g(t_1)] + F(t_2) [g(t_1) - g(t_2)] + \dots + F(t_{n-1}) [g(b) - g(t_{n-1})] + g(t_{n-1}) F(b) =$$

$$= -g(a) F(a) + \sum_{i=1}^{n-1} F(t_i) \underbrace{[g(t_{i+1}) - g(t_i)]}_{\text{dodatnie}} + g(t_{n-1}) F(b)$$

$$m = \inf_{[a, b]} f, \quad M = \sup_{[a, b]} f \quad S^e \leq M [g(a) - g(t_1) + g(t_1) - g(t_2) + \dots + g(t_{n-1}) - g(t_n) + g(t_n)] = M g(a)$$

podobnie $S^s \geq m g(a)$

$$m g(a) \leq S^e \leq M g(a)$$

$$- \varepsilon \leq S^1 \leq \varepsilon$$

$$m g(a) - \varepsilon \leq S^1 + S^2 \leq M g(a) + \varepsilon$$

$$m g(a) - \varepsilon \leq \int_a^b fg \leq M g(a) + \varepsilon \quad /: g(a)$$

$$m + \frac{\varepsilon}{g(a)} \leq \frac{1}{g(a)} \int_a^b fg \leq M + \frac{\varepsilon}{g(a)} \quad \varepsilon \text{ jest dowolnie małe, więc mamy}$$

$$\inf f \nearrow m \leq \frac{1}{g(a)} \int_a^b fg \leq M \nwarrow \sup f$$

Wartość pośrednia $\Rightarrow$ istnieje ξ : $F(\xi) = \frac{1}{g(a)} \int_a^b fg$

$$g(a) \int_a^\xi f = \int_a^\xi fg$$

② Jeśli g jest nieujemna i niemalejąca można bardzo podobnie udowodnić, że istnieje $\xi \in [a, b]$ takie, że $\int_a^b fg = g(b) \int_a^b f$

③ Przechodzimy do dowodu samego wzoru Bonneto. Z założenia wiemy, że g jest monotoniczne. Jeśli g jest niemalejąca to $t \mapsto g(b) - g(t)$ jest nierosnąca i dodatnia. Korzystamy ze wzoru

① Jeśli g jest nierosnąca to $t \mapsto g(a) - g(t)$ jest niemalejąca i dodatnia i korzystamy z ②

$$\begin{aligned} \int_a^b f(g(b) - g) &= (g(b) - g(a)) \int_a^b f \\ g(b) \int_a^b f - \int_a^b fg &= g(b) \int_a^b f - g(a) \int_a^b f \\ g(b) \int_a^b f + g(a) \int_a^b f &= \int_a^b fg \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_a^b f(g(a) - g) &= (g(a) - g(b)) \int_a^b f \\ g(a) \int_a^b f - \int_a^b fg &= g(a) \int_a^b f - g(b) \int_a^b f \\ g(a) \int_a^b f + g(b) \int_a^b f &= \int_a^b fg \end{aligned}$$

UWAGA: Wzory ① i ② noszą nazwę Drugie twierdzenie o wartości średniej dla całki.