

CIAŁA I SZEREGI FUNKCYJNE

1

Naturalnym uogólnieniem pojęcia szeregu potęgowego jest szereg funkcyjny. Zmiana polega na tym, że wyraz szeregu nie jest liczbą a funkcją zależną od zmiennej.

$$\sum_{n=L}^{\infty} u_n(x) = u_1(x) + u_2(x) + u_3(x) + \dots$$

Po wstawieniu konkretnej wartości x otrzymujemy „zwykły” szereg liczbowy, zbieżny lub nie. Jeśli dla pewnych x , np. z odcinka I szereg jest zbieżny jego sumę w każdym punkcie $x \in I$ określa funkcję $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ $f(x) = \sum_n u_n(x)$. Mówimy wtedy, że szereg $\sum u_n(x)$ jest **punktowno zbieżny** do funkcji f . Badanie zbieżności punktowej szeregu funkcyjnego nie różni się istotnie od badania szeregów liczbowych. Problem pojawia się kiedy chcemy wnioskować o własnościach funkcji granicznej na podstawie własności wyrazów szeregu. Myślimy tutaj o własnościach typu ciągłość, różniczkowalność, całkowalność.

PRZYKŁAD: Rozważmy szereg funkcyjny $\sum_{n=0}^{\infty} u_n(x)$, $u_n(x) = \frac{x^2}{(1+x^2)^n}$
sumy częściowe:

$$u_0(x) = x^2 \quad u_1(x) = x^2 \left[\frac{x^2+2}{1+x^2} \right] \quad u_2(x) = x^2 \left[\frac{x^4+3x^2+3}{(1+x^2)^2} \right] \dots$$

Ten przykład jest o tyle prosty, że możemy łatwo policzyć ogólną postać sumy częściowej

$$\begin{aligned} u_n(x) &= \sum_{k=0}^n \frac{x^2}{(1+x^2)^k} = x^2 \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{1+x^2} \right)^k = x^2 \frac{1 - \frac{1}{(1+x^2)^{n+1}}}{1 - \frac{1}{1+x^2}} = \\ &= x^2 \frac{(1+x^2)}{x^2} \left(1 - \frac{1}{(1+x^2)^{n+1}} \right) = (1+x^2) \left(1 - \frac{1}{(1+x^2)^{n+1}} \right) \end{aligned}$$

$$u(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} u_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} (1+x^2) \left(1 - \frac{1}{(1+x^2)^{n+1}}\right) = (1+x^2) \text{ dla } x \neq 0$$

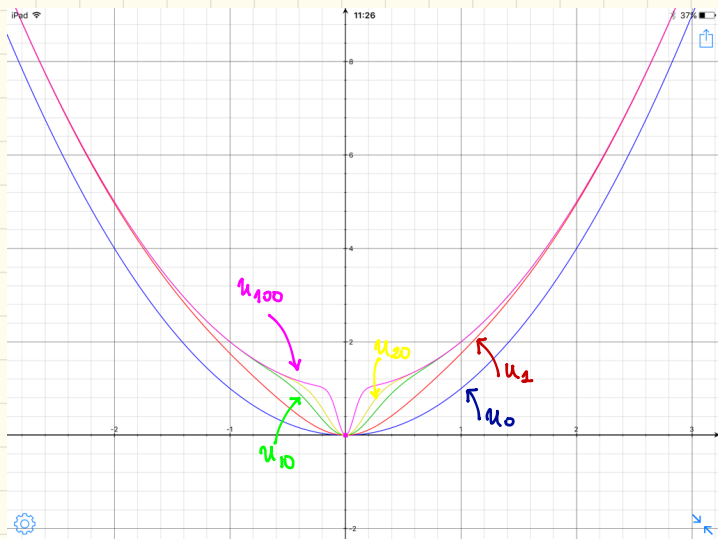
jednak dla $x=0$

$$u_n(0) = 1 \cdot \left(1 - \frac{1}{1}\right) = 0 \text{ zatem } u(0) = 0$$

$$u(x) = \begin{cases} 1+x^2 & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

Funkcja graniczna jest nieciągła w zerze. Oznacza to że nie można zamienić kolejności przechodzenia do granicy

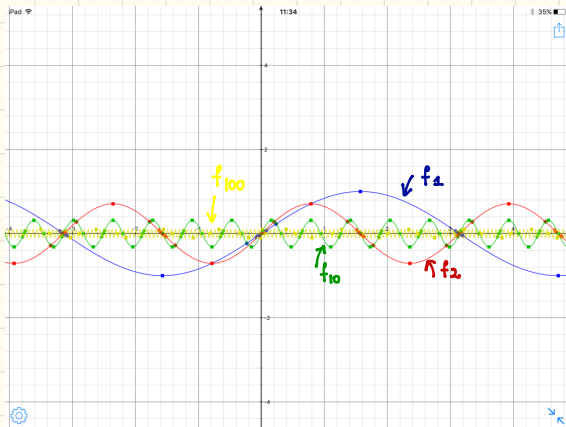
$$\lim_{x \rightarrow 0} \lim_{n \rightarrow \infty} u_n(x) = 1 \neq 0 = \lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{x \rightarrow 0} u_n(x)$$



Wniosek: ciąg funkcji ciągłych, szereg funkcji ciągłych nie musi być zbieżny do funkcji ciągłej.

PRZYKŁAD: $f_n(x) = \frac{1}{\sqrt{n}} \sin(nx)$

3



$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \sin(nx) = 0$$

Funkcja graniczna jest stała a więc różniczkowalna

Ciąg pochodnych $f'_n(x) = \sqrt{n} \cos(nx)$ nie jest zbieżny, w niektórych punktach ma granicę ∞ , w niektórych nie ma granicy.

Mamy więc ciąg różniczkowalnych funkcji zbieżny do oznaczalnej granicy ale ciąg pochodnych nie ma granicy. W szczególności nie można napisać

$$\frac{d}{dx} \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) \neq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{d}{dx} f_n(x)$$

Potrzebujemy zatem jakiegoś sposobu rozpoznawania kiedy ma podstawić własności wyrażeni ciągu czy szeregu funkcyjnego możemy wnioskować o tych samych własnościach dla funkcji granicznych

Problemy z zachowaniem własności funkcji przy przejściu do granicy wiąże się z tym, że w otoczeniu pewnych punktów wyrazy ciągu zmienną się coraz szybciej wraz ze zmianną n . W pierwszym przykładzie dotyczy to punktu x_0 , w drugim każdego z punktów. Takie sytuacje rozpoznajemy korzystając z pojęcia **zbieżności jednostajnej** tzn. zbieżności ciągu funkcyjnego w metryce supremum.

DEFINICJA: Niech X będzie zbiorem a (Y, d) przestrzenią metryczną. Niech także $f_n: X \rightarrow Y$ $n \in \mathbb{N}$ będzie ciągiem odwzorowań. Mówimy że

(1) f_n dąży do f **punktowno** jeśli $\forall x \in X \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f$

(2) f_n dąży do f **jednostajnie** jeśli $\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_x d(f_n(x), f(x)) = 0$

to znaczy $\forall \varepsilon > 0 \exists N: \forall n > N \sup_x d(f_n(x), f(x)) < \varepsilon$

(3) Jeśli dodatkowo X jest przestrzenią metryczną to mówimy, że f_n dąży do f **miernie jednostajnie** jeżeli f_n dąży do f jednostajnie na każdym zwartym podzbiórze X .

Zauważmy że w przykładzie 1 ciąg sum częściowych

$$u_n(x) = (1+x^2) \left(1 - \frac{1}{(1+x^2)^{n+1}}\right) \text{ dąży punktowo do } u_\infty(x) = \begin{cases} 1+x^2 & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

nie jest to jednak zbieżność jednostajna gdyż dla każdego n znajdziemy otoczenie $x=0$ takie, że wartości funkcji granicznej są bliskie 1 zaś wartości funkcji u_n bliskie zero. Wystarczy rozważyć

$$u_n\left(\frac{1}{n}\right) \text{ i } u_\infty\left(\frac{1}{n}\right) = 1 + \frac{1}{n^2} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1$$

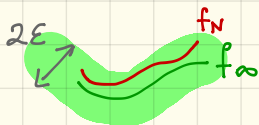
$$\text{zatem } \sup |u_n(x) - u_\infty(x)| \geq 1.$$

$$\frac{n^2+1}{n} \left(1 - \left(\frac{n^2}{n^2+1}\right)^{n+1}\right) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

Twierdzenie: Niech (X, d) , (Y, ρ) będą przestrzeniami metrycznymi. Granice jednostajne ciągu odwzorowań ciągłych $f_n: X \rightarrow Y$ jest odwzorowaniem ciągłym

Dowód:

$$f_n \longrightarrow f$$



$$d_Y(f(x_0), f(x)) \leq d_Y(f(x_0), f_n(x_0)) + d_Y(f_n(x_0), f(x)) \leq$$

$$d_Y(f(x_0), f_n(x_0)) + d_Y(f_n(x_0), f_n(x)) + d_Y(f_n(x), f(x))$$

Wzimy teraz $m \in \mathbb{N}$ takie żeby $\sup d_Y(f_n(x), f(x)) < \varepsilon$, wtedy pierwszy i trzeci składnik sumy jest ograniczony przez ε . 5

Drugi ograniczamy korzystając z ciągłości f_m : bierzemy δ : dla $d_X(x, x_0) < \delta$ mamy $d_Y(f_n(x), f_n(x_0)) < \varepsilon$.

$$\begin{aligned} d_Y(f(x_0), f(x)) &\leq d_Y(f(x_0), f_n(x_0)) + d_Y(f_n(x_0), f_n(x)) + d_Y(f_n(x), f(x)) \\ &\leq \varepsilon \quad \quad \quad \leq \varepsilon \quad \quad \quad \leq \varepsilon \end{aligned}$$

Zatem dla δ : $d_X(x_0, x) < \delta$ $d_Y(f(x_0), f(x)) < 3\varepsilon$ co dowodzi ciągłości f . ■

Uwaga: Ciągłość jest pojęciem lokalnym, co oznacza, że w założeniach twierdzenia można zastąpić warunek jednostajnej zbieżności do niemożliwej jednostajnej dla przestrzeni lokalnie zwartej czyli takiej, której każdy punkt posiada zwarte otoczenie

W dalszym ciągu interesować nas będą takie własności jak różniczkowalność i całkowalność, wobec tego ograniczymy się do funkcji określonych na $\mathbb{R}$ lub jego podzbiórach i o własnościach w $\mathbb{R}$ lub $\mathbb{C}$. Jeśli funkcje we wartościach w $\mathbb{C}$ traktujemy je jak parę funkcji rzeczywistych.

TWIERDZENIE: $f_n: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ klasy C^1 , zbieżny punktowo do f . Jeśli ciąg pochodnych $(f'_n)_{n \in \mathbb{N}}$ jest zbieżny do g niemożliwie jednostajnie na $[a, b]$ to f jest różniczkowalne i $f' = g$.

DOWÓD: Naszym zadaniem jest wykazać istnienie granicy

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \quad \text{oraz to, że granica ta jest równa } g(x)$$

6

$$\text{tzn } \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : |h| < \delta \Rightarrow \left| \frac{f(x+h) - f(x)}{h} - g(x) \right| < \varepsilon$$

Wiadomo, że f_n są klasy C_1 , tzn w szczególności

$$f_n(x+h) = f_n(x) + h \cdot f'_n(x+\vartheta h) \quad \vartheta \in]0,1[$$

$$\frac{f_n(x+h) - f_n(x)}{h} = f'_n(x+\vartheta h)$$

$$\left| \frac{f_n(x+h) - f_n(x)}{h} - g(x) \right| = \left| f'_n(x+\vartheta h) - g(x) \right| < \left| f'_n(x+\vartheta h) - g(x+\vartheta h) \right| +$$

$$\left| g(x+\vartheta h) - g(x) \right|$$

g jest granicą jednostajną ciągu funkcji ciągłych więc jest ciągła. W tej sytuacji dla ustalonego ε istnieje δ takie, że jeśli $|\vartheta h| < \delta$ to $|g(x+\vartheta h) - g(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$. Ponieważ $\vartheta \in]0,1[$ wystarczy wziąć $h < \delta$.

g jest granicą niemal jednostajną ciągu f_n . Jeśli więc weźmiemy $[\alpha, \beta] \subset]a, b[$ taki, że $x \in [\alpha, \beta]$ to istnieje N takie, że dla $n > N$ $\sup_{x \in [\alpha, \beta]} |f'_n(x) - g(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$

Ostatecznie więc dla $|h| < \delta$ i $n > N$ mamy

$$\left| \frac{f_n(x+h) - f_n(x)}{h} - g(x) \right| < \varepsilon$$

$$\left| \frac{f_n(x+h) - f_n(x)}{h} - g(x) \right| < \varepsilon$$

$\downarrow n \rightarrow \infty$

Nierówność ta wymaga, aby n było wystarczająco duże. Prawe składowe od n nie zależy, można więc wziąć $\lim_{n \rightarrow \infty}$

$$\left| \frac{f(x+h) - f(x)}{h} - g(x) \right| < \varepsilon \quad \text{Ta nierówność dowodzi się dla } |h| < \delta.$$

TWIERDZENIE Niech $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ będzie ciągiem funkcji całkowalnych na $[a, b]$ zbieżnym jednostajnie do funkcji f . Wtedy f całkowalna i

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(x) dx = \int_a^b f(x) dx.$$

Jeśli f całkowalna to twierdzenie jest raczej oczywiste:

$$\left| \int_a^b f_n(x) dx - \int_a^b f(x) dx \right| = \left| \int_a^b [f_n(x) - f(x)] dx \right| \leq \int_a^b |f_n(x) - f(x)| dx$$

$\leq (b-a) \cdot \varepsilon$ dla wystarczająco dużych n .

Jak wykazać całkowalność f ? Musimy pokazać, że dla dowolnego $\varepsilon > 0$ istnieje podział π odinka $[a, b]$ taki, że

$$\bar{S}(\pi, f) - \underline{S}(\pi, f) < \varepsilon. \quad \text{Wiadomo, że dla } f_n \text{ taki podział}$$

istnieje: $\bar{S}(\pi, f_n) - \underline{S}(\pi, f_n) < \eta \quad \pi = \{a, t_1, t_2, \dots, t_{k-1}, b\}$

dla małego η

Zauważmy, że dla wystarczająco dużych n mamy

$$\sup_{x \in [a, b]} |f_n(x) - f(x)| < \eta \quad \text{co oznacza że}$$

$$f_n(x) - \eta < f(x) < f_n(x) + \eta$$

i dalej

$$\sup f_n - \eta \leq \sup f \leq \sup f_n + \eta$$

$$\inf f_n - \eta \leq \inf f \leq \inf f_n + \eta$$

Ma to swoje konsekwencje dla sumy dolnej i górnej

$$\overline{S}(\pi, f) = \sum \sup_{t_{i-1}}^t f (t_i - t_{i-1}) \leq \sum (\sup f_n + \eta) (t_i - t_{i-1}) = \overline{S}(\pi, f_n) + \eta(b-a)$$

$$\underline{S}(\pi, f) = \sum \inf_{t_{i-1}}^t f (t_i - t_{i-1}) \geq \sum (\inf f_n - \eta) (t_i - t_{i-1}) = \underline{S}(\pi, f_n) - \eta(b-a)$$

$$\underline{S}(f_n, \pi) - \eta(b-a) \leq \underline{S}(f, \pi) \leq \overline{S}(f, \pi) \leq \overline{S}(\pi, f_n) + \eta(b-a)$$

$$\overline{S}(\pi, f_n) - \underline{S}(\pi, f_n) \leq \eta + 2\eta(b-a) = \eta(1 + 2(b-a))$$

Należy więc wybrać π i n odpowiednio dla $\eta = \frac{\varepsilon}{1 + 2(b-a)}$

■

Widać więc, że istotną rolę w badaniu własności funkcji granicznych ma sprawdzanie, że zbieżność jest jednostajna lub niemal jednostajna. Dla ciągów funkcyjnych zazwyczaj robimy to z definicji. Do dyspozycji mamy 4 zasady, tylko jedno pomocnicze twierdzenie:

Twierdzenie Diniego: Jeśli (X, d) jest lokalnie zwarta i ciąg funkcji ciągłych jest zbieżny do funkcji ciągłej punktowo a ponadto $f_n(x)$ jest monotoniczny dla każdego x to ciąg ten jest zbieżny niemal jednostajnie

Dowód opuszczamy

Dla szeregów funkcyjnych korzystanie bezpośrednio z definicji jest trudniejsze.

Do pomocy mamy tu podstawowe i najważniejsze

KRYTERIUM WEIERSTRASSA

Niech $\sum u_n$ będzie szeregiem funkcyjnym na zbiorze X . Jeśli istnieje ciąg liczbowy $\sum a_n$ taki, że $\sup_X |f_n(x)| \leq a_n$ i $\sum a_n$ zbieżny to $\sum f_n$ jest

zbieżny bezwzględnie i jednostajnie na X .

DOWÓD: Dla ustalonego $x \in X$ $\sum u_n(x)$ jest zbieżny bezwzględnie na podstawie I kryterium porównawczego. Funkcja będąca sumą tego szeregu istnieje więc: $u(x) = \sum u_n(x)$ $u: X \rightarrow \mathbb{C} (\mathbb{R})$

$$\left| u(x) - \sum_{k=1}^n u_k(x) \right| = \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} u_k(x) \right| \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} |u_k(x)| \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k < \varepsilon$$

"ogon" szeregu zbieżnego

$$\sup_X \left| u(x) - \sum_{k=1}^n u_k(x) \right| \leq \varepsilon$$

co wystarczy do zbieżności jednostajnej

