ZASADA INDUKCJI MATEMATYCZNEJ: Zasada indukcji matematycznej wyraża fundamentalną własność zbioru liczb naturalnych – nie będziemy jej dowodzić, ponieważ nie podajemy konstrukcji zbioru $\mathbb{N}$. Nie mamy się więc na czym oprzeć:

TWIERDZENIE: Niech $T \subset \mathbb{N}$ będzie podzbiorem takim, że spełnione są dwa warunki: (1) $1 \in T$, (2) $n \in T \Rightarrow n+1 \in T$, wtedy $T = \mathbb{N}$.

PRZYKŁAD: Metodą indukcji udowodnić prawdziwość twierdzenia:

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad 1\cdot 2 + 2\cdot 3 + \dots + n(n+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3} \quad (*)$$

Zbiór T definiujemy jako

$$T = \left\{ n \in \mathbb{N} : \ 1\cdot 2 + 2\cdot 3 + \dots + n(n+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3} \right\}$$

sprawdzamy, czy spełnione są warunki podane w założeniach zasady indukcji

$n = 1$ $\quad 1\cdot 2 = 2 \overset{?}{=} \frac{1(1+1)(1+2)}{3} = \frac{6}{3} = 2$ $\quad$ pierwszy warunek jest spełniony.

Zakładamy teraz że $k \in T$, tzn $1\cdot 2 + 2\cdot 3 + \dots + k(k+1) = \frac{1}{3}k(k+1)(k+2)$ i sprawdzamy czy $k+1 \in T$:

$$\underbrace{1\cdot 2 + 2\cdot 3 + \dots + k(k+1)}_{\frac{1}{3}k(k+1)(k+2)} + (k+1)(k+2) = \frac{1}{3}k(k+1)(k+2) + (k+1)(k+2) = \frac{1}{3}(k+1)(k+2)\left[k+3\right] =$$

$$= \frac{(k+1)(k+2)(k+3)}{3}$$

$n = k+1$ także jest elementem T

Na mocy zasady indukcji stwierdzamy, że wzór $(*)$ jest prawdziwy dla wszystkich liczb naturalnych. Dokładniej, wykazaliśmy że zbiór T tych liczb dla których $*$ zachodzi jest równy $\mathbb{N}$. ○

PRZYKŁAD: Zasada indukcji może być użyta także do dowodzenia bardziej „teoretycznych twierdzeń". Jako przykład posłuży dowód zasady minimum dowiązującej dla podzbiorów $\mathbb{N}$

TWIERDZENIE: Każdy niepusty podzbiór zbioru liczb naturalnych ma element najmniejszy.

DOWÓD: Załóżmy n.a. że istnieje zbiór $A \subset \mathbb{N}$, który nie ma elementu najmniejszego i nie jest zbiorem pustym. Oznaczmy T zbiór dolnych ograniczeń A, tzn

$$T = \{ n \in \mathbb{N} : \ \forall k \in A \quad n < k \}$$

(1) $1 \in T$, gdyż jeśli $1 \notin T$ to $1 \in A$ i jest jego najmniejszym elementem.

(2) załóżmy, że $n \in T$. Z definicji T oznacza to, że $\forall k \in A \ n < k$. Wtedy także $n+1 \in T$. W przeciwnym razie $n+1 \in A$ i jest jego najmniejszym elementem.

Na mocy zasady indukcji $T = \mathbb{N}$. W takim przypadku $A = \emptyset$, ponieważ z definicji T wynika, że $T \subset \mathbb{N} \setminus A$. □ ○

PRZYKŁAD: Kolejny przykład zastosowania zasady indukcji jest trochę makabryczny. Wyobraźmy sobie plemię ludzkie żyjące na wyspie w izolacji od reszty świata. W tym plemieniu są wyłącznie osoby mające niebieskie lub zielone oczy. Na całej wyspie nie ma ani jednego lustra, które pozwalałoby stwierdzić jakiego koloru oczy się ma. Obowiązuje zakaz mówienia współplemieńcom jakiego koloru oczy mają. Obowiązuje także zasada, że każdy kto dowie się że ma zielone oczy musi do północy tego dnia kiedy się o tym dowiedział popełnić samobójstwo. Poza tym jedynym dziwactwem dotyczącym koloru oczu mieszkańcy wyspy są bardzo mądrzy – potrafią rozumować logicznie. Pewnego dnia na wyspie wylądował rozbitek. Mieszkańcy przyjęli go do siebie, objaśnili zasadę dotyczącą oczu i pozwolili zamieszkać na wyspie. Po kilku latach do brzegów przybiła ekspedycja ratunkowa. Przed odjazdem rozbitek wygłosił mowę dziękczynną w której niefortunnie poruszył kwestię koloru oczu: powiedział Jestem pod wielkim wrażeniem tego, że choć na wyspie są osoby o zielonych oczach, wszyscy przestrzegają tabu i od wielu lat nikt nie musiał z tego powodu popełnić samobójstwa. Wykazać metodą indukcji, że po dokładnie n dniach na wyspie nie było już nikogo z zielonymi oczami. n jest liczbą osób z zielonymi oczami, które mieszkały na wyspie w dniu odjazdu rozbitka. Dowód pozostawiam państwu.

RELACJA RÓWNOWAŻNOŚCI Wśród wszystkich możliwych relacji wyróżniliśmy jak dotąd odwzorowanie. Pora na kolejny istotny typ relacji. Tym razem jest to relacja w zbiorze, tzn oba zbiory biorące udział w relacji są jednakowe.

DEFINICJA: Relację R w zbiorze X (ze zbioru X do X) nazywamy *relacją równoważności* jeśli spełnione są trzy warunki:

(1) relacja jest *zwrotna*, tzn $\forall x \in X \quad (x,x) \in R$

(2) relacja jest *symetryczna*, tzn $\forall x,y \in X \quad (x,y) \in R \Rightarrow (y,x) \in R$

(3) relacja jest *przechodnia*, tzn $\forall x,y,z \in R \quad (x,y) \in R$ i $(y,z) \in R \Rightarrow (x,z) \in R$

DEFINICJA Niech R będzie relacją równoważności w X. Zbiór

$$[x]_R = \{ y \in X : (x,y) \in R \}$$

nazywamy *klasą abstrakcji* lub *klasą równoważności* elementu x.

STWIERDZENIE: Niech R będzie relacją równoważności w X. (1) Dwie klasy równoważności są albo równe albo rozłączne. (2) Zbiór X jest sumą klas równoważności.

DOWÓD: (1) Weźmy dowolne $x,y \in X$. Jeśli $(x,y) \in R$ to $[x]_R = [y]_R$. Istotnie: Weźmy $z \in [x]_R$. Przynależność do $[x]_R$ oznacza, że $(x,z) \in R$, ponieważ $(x,y) \in R$, to z warunku przechodniości $(y,z) \in R$, czyli $z \in [y]_R$. Mamy więc $[x]_R \subset [y]_R$. Symetria R oznacza, że $[y]_R \subset [x]_R$. Ostatecznie więc $[x]_R = [y]_R$. Jeśli zaś $(x,y) \notin R$ to klasy $[x]_R$ i $[y]_R$ są rozłączne. Gdyby istniało $z \in [x]_R \cap [y]_R$ to $(x,z) \in R$ i $(y,z) \in R$ a wtedy $(x,y) \in R$. (2) ponieważ R jest zwrotna, to każdy element x należy do jakiejś klasy równoważności.

$$X = \bigcup_{x \in X} [x]_R \quad \square$$

PRZYKŁAD: Niech $X = \mathbb{N} \times \mathbb{N}$. W X wprowadzamy relację

$$(m,n) \sim (m',n') \iff m+n' = n+m'$$

Sprawdzamy, że to relacja równoważności: **zwrotność:** $(m,n) \sim (m,n)$ bo $m+n = n+m$. **symetria:** $(m,n) \sim (m',n')$ zatem $m+n' = n+m'$. Warunek $(m',n') \sim (m,n)$ wygląda $m'+n = n'+m$, zatem właściwie tak samo. **przechodniość:** $(m,n) \sim (m',n')$ i $(m',n') \sim (m'',n'')$, tzn

$$\begin{array}{rl} & m+n' = n+m' \\ + & m'+n'' = n'+m'' \\ \hline \end{array}$$

$$m + \cancel{n'} + \cancel{m'} + n'' = n + \cancel{m'} + \cancel{n'} + m''$$

$$m + n'' = n + m'' \longrightarrow (m,n) \sim (m'',n'')$$

Obejrzyjmy klasy równoważności

$$[(1,1)] = \{(m,n) : m+1 = n+1\} = \{(m,n) : m = n\}$$

$$[(1,2)] = \{(m,n) : m+2 = n+1\} = \{(m,n) : m+1 = n\}$$

$$[(2,1)] = \{(m,n) : m+1 = n+2\} = \{(m,n) : m = n+1\}$$

$n \backslash m$	1	2	3	4	5	6	7	8
1	(1,1)	(2,1)	(3,1)	(4,1)	(5,1)			
2	(1,2)							
3	(1,3)							
4	(1,4)							
5	(1,5)		(3,5)					
6	(1,6)							
7	(1,7)							

Klasy równoważności zaznaczono kolorami. Wprowadźmy teraz działanie na klasach równoważności

$$[(m,n)] + [(m',n')] = [(m+m', n+n')]$$

Ponieważ działanie jest zdefiniowane na klasach równoważności poprzez reprezentantów wstępnie należy sprawdzić czy definicja jest poprawna. weźmy $(a,b) \sim (m,n)$ czy

$$[(a,b)] + [(m',n')] = [(m,n)] + [(m',n')]$$

tzn, czy $(a+m', b+n') \sim (m+m', n+n')$ sprawdzamy

$$a + \cancel{m'} + n + \cancel{n'} \stackrel{?}{=} b + \cancel{n'} + m + \cancel{m'}$$

$a + n = b + m \leftarrow$ to jest warunek $(a,b) \sim (m,n)$ czyli o.k.

Dodawanie na klasach ma ciekawe własności: $[(1,1)]$ jest elementem neutralnym, tzn $[(m,n)] + [(1,1)] = [(m,n)]$. Dodawanie jest przemienne. Dodatkowo $[(m,n)] + [(n,m)] = [(1,1)]$, czyli każda klasa ma element przeciwny. Przyjrzyjmy się także klasie $[(2,1)]$:

$[(2,1)]+[(2,1)]=[(4,2)]=[(3,1)]$

$[(3,1)]+[(2,1)]=[(5,2)]=[(4,1)]$

$[(4,1)]+[(2,1)]=[(6,2)]=[(5,1)]$ ...

Dodawanie $[(2,1)]$ przesuwa klasę równoważności o 1 w prawo. Łatwo przekonać się, że dodawanie elementu przeciwnego, czyli $[(1,2)]$ przesuwa o 1 w lewo. Jeśli zgodnie z tradycją dodawanie elementu przeciwnego oznaczymy jako odejmowanie, to wszystkie elementy $\mathbb{N}\times\mathbb{N}/_\sim$ można wygenerować dodając lub odejmując $[(2,1)]$. Ta struktura bardzo przypomina $(\mathbb{Z},+)$ liczby całkowite z dodawaniem. Zdefiniujmy odwzorowanie φ:

$-k$	...	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	...	k
$\downarrow$		$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$		$\downarrow$
$[(1,k+1)]$		$[(1,6)]$	$[(1,5)]$	$[(1,4)]$	$[(1,3)]$	$[(1,2)]$	$[(1,1)]$	$[(2,1)]$	$[(3,1)]$	$[(4,1)]$	$[(5,1)]$		$[(k+1,1)]$

Odwzorowanie to jest bijekcją oraz jest zgodne z dodawaniem, tzn $\varphi(k+l)=\varphi(k)+\varphi(l)$. Można więc powiedzieć że używając $\mathbb{N}$ i pojęcia relacji równoważności skonstruowaliśmy $\mathbb{Z}$ - zbiór liczb całkowitych. Zwróćmy uwagę, że odwzorowanie φ nie jest jedyne dobre. Równie dobre zadziałałoby ψ: $\psi(0)=[(1,1)]$ $\psi(1)=[(1,2)]$ $\psi(-1)=[(2,1)]$.

W podobny sposób, wprowadzając odpowiednią relację równoważności w zbiorze $\mathbb{Z}\times\mathbb{N}$ można zdefiniować $\mathbb{Q}$ - zbiór liczb wymiernych. Wymyślenie odpowiedniej relacji i wprowadzenie na klasach relacji mnożenia i dodawania zostawiamy na ćwiczenia lub do samodzielnej pracy.

LICZBY RZECZYWISTE: Zbiór liczb rzeczywistych $\mathbb{R}$ także można skonstruować podobnie jak to zrobiliśmy z $\mathbb{Z}$ czy $\mathbb{Q}$. Znane są przynajmniej dwie różne konstrukcje. Jedna z nich nosi nazwę przekrojów Dedekinda, a drugi sposób oparty jest na pojęciu ciągu Cauchy'ego. O metodach tych wspomnimy nieco później, natomiast teraz wprowadzimy liczby rzeczywiste w sposób aksjomatyczny, wypisując fundamentalne własności zbioru liczbowego, które znamy niejako z doświadczenia.

(1) $(\mathbb{R},1,0,+,\cdot)$ JEST CIAŁEM Definicja ciała najprawdopodobniej pojawiła się na zajęciach z algebry. Własności ciała to wszystkie znane własności dodawania i mnożenia. Oczywiście istnieje wiele ciał, w szczególności np $(\mathbb{Q},1,0,+,\cdot)$ jest ciałem dość podobnym do $\mathbb{R}$, ale jednak istotnie różnym.

(2) $\mathbb{R}$ JEST CIAŁEM UPORZĄDKOWANYM LINIOWO Oznacza to, że w $\mathbb{R}$ wyróżniony jest zbiór $\mathbb{R}_+$ o następujących własnościach: $\mathbb{R}_+\cap-\mathbb{R}_+=\emptyset$, $-\mathbb{R}_+\cup\{0\}\cup\mathbb{R}_+=\mathbb{R}$

$\mathbb{R}_+$ jest zamknięty ze względu na dodawanie i mnożenie, tzn

$$\forall x,y\in\mathbb{R}_+ \quad x\cdot y\in\mathbb{R}_+ \text{ i } x+y\in\mathbb{R}_+$$

Wyróżnienie $\mathbb{R}_+$ pozwala wprowadzić w $\mathbb{R}$ relację porządku

$$x<y \iff y-x\in\mathbb{R}_+ \qquad x\leq y \iff x=y \text{ lub } x<y$$

Relacja „$\leq$" spełnia następujące warunki:

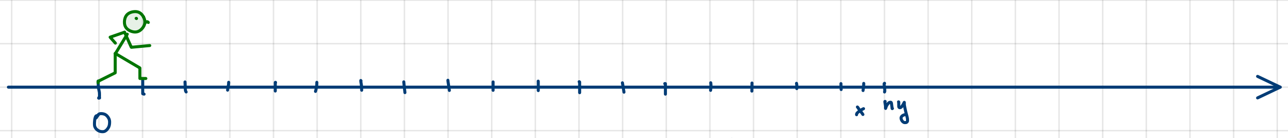
relacja częściowego porządku

- relacja $\leq$ jest antysymetryczna $x \leq y$ i $y \leq x \Rightarrow x = y$
- relacja $\leq$ jest przechodnia, tzn $x \leq y$ i $y \leq z \Rightarrow x \leq z$
- każde dwa elementy są porównywalne $\forall x,y$ $x \leq y$ lub $y \leq x$

relacja liniowego porządku

(3) AKSJOMAT ARCHIMEDESA

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \forall y \in \mathbb{R}_+ \quad \exists n \in \mathbb{N} : \quad x < ny$$



Idąc krokami dowolnej (ale ustalonej) długości możemy zajść dowolnie daleko.

(4) AKSJOMAT ZUPEŁNOŚCI Ciągiem liczb rzeczywistych nazywamy odwzorowanie $x : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$. Tradycyjnie zamiast $x(n)$ piszemy x_n oraz zamiast $x : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ piszemy $(x_n)_{n \in \mathbb{R}}$. Mówimy że ciąg jest rosnący, jeśli dla $m > n$ $x_m \geq x_n$ a malejący jeśli dla $m > n$ $x_m \leq x_n$

Aksjomat zupełności głosi, że dla dowolnych dwóch ciągów $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ takich, że (x_n) jest rosnący, (y_n) malejący i $\forall n$ $x_n \leq y_n$ istnieje liczba $r \in \mathbb{R}$ taka, że $\forall n$ $x_n \leq r \leq y_n$

TWIERDZENIE Zbiór $(\mathbb{R}, 1, 0, +, \cdot)$ spełniający powyższe aksjomaty jest jedyny z dokładnością do izomorfizmu, tzn jeśli istnieje $(\mathbb{K}, 1_K, 0_K, +_K, \cdot_K)$ spełniające (1)-(4) to istnieje bijekcja $\mathbb{K} \to \mathbb{R}$ zachowująca działania i porządek.

Powyższe twierdzenie pozostawiamy bez dowodu. Zauważmy, że ciało $\mathbb{Q}$ spełnia wszystkie aksjomaty poza (4).

PRZYKŁADY UŻYCIA AKSJOMATÓW DO DOWODZENIA OCZYWISTYCH FAKTÓW: Spróbujmy udowodnić prawo skracania, tzn

$$\forall a,b,x \in \mathbb{R} \qquad a+x > b+x \iff a > b$$

$$a+x > b+x \iff (a+x)-(b+x) \in \mathbb{R}_+ \iff (a-b) + \underbrace{(x-x)}_{0} \in \mathbb{R}_+ \iff a-b \in \mathbb{R}_+$$
$$\iff a > b.$$

Do kolejnego dowodu wykorzystamy aksjomat Archimedesa. Mamy udowodnić, że dla dowolnej pary $x,y \in \mathbb{R}$: $x < y$ istnieje $q \in \mathbb{Q}$ takie, że $x < q < y$.

Skoro $x < y$ to $y - x \in \mathbb{R}_+$. Możemy skorzystać z aksjomatu Archimedesa wybierając n takie aby

$n(y-x) > 1$ $ny - nx > 1$ $ny > nx + 1$

w tym odcinku $[nx, nx+1]$ jest przynajmniej jedna liczba całkowita: istotnie, jeśli $x>0$ oznaczmy przez T zbiór liczb naturalnych większych niż nx. Ten zbiór jest niepusty, bo (Archimedes) $\exists m: m \cdot 1 > nx$ zatem ma element najmniejszy M. Ten element jest niewiększy niż $nx+1$, bo

$$M-1 \leq nx < M \quad / +1$$

$$M \leq nx+1 < M+1$$

$$nx < M \leq nx+1 < ny$$

$$nx < M < ny$$

$$x < \underbrace{M/n}_{q} < y$$

Dla $x<0$ bierzemy $T = \{m : m > -nx\}$ i rozumujemy podobnie

Dla $x=0$ mamy $ny > nx+1 = 1$ $0 < 1 < ny$ $0 < \underbrace{\tfrac{1}{n}}_{q} < y$ ○

KRESY ZBIORÓW W $\mathbb{R}$ Aksjomat zupełności pozwala udowodnić pewną bardzo istotną własność podzbiorów $\mathbb{R}$. Najpierw wprowadzimy pewne słownictwo. Niech A będzie podzbiorem $\mathbb{R}$.

Mówimy że A jest ograniczony z góry jeśli istnieje $M \in \mathbb{R}$ takie, że $\forall a \in A \ M \geq a$. A jest ograniczony z dołu jeśli istnieje $m \in \mathbb{R}$ takie że $\forall a \in A \ m \leq a$. Mówimy, że zbiór A jest ograniczony jeśli jest ograniczony z dołu i z góry.

Ograniczeniem górnym A nazywamy każdą liczbę M spełniającą $\forall a \in A \ M \geq a$, a ograniczeniem dolnym każdą liczbę m spełniającą $\forall a \in A \ m \leq a$.

DEFINICJA: Niech A będzie ograniczony z góry. Kresem górnym zbioru A nazywamy najmniejsze ograniczenie górne. Oznaczamy $\sup A$. Niech B będzie ograniczony z dołu. Kresem dolnym zbioru B nazywamy największe ograniczenie dolne. Oznaczamy $\inf B$

TWIERDZENIE Każdy niepusty ograniczony z dołu (z góry) podzbiór $\mathbb{R}$ ma kres dolny (górny).

DOWÓD: Dowód robimy dla kresu górnego. Niech A będzie zbiorem ograniczonym z góry. Weźmy ustalone $a \in A$. Z aksjomatu Archimedesa wnioskujemy, że zbiór $\{k \in \mathbb{N} : a + k \cdot \frac{1}{2}$ jest ograniczeniem górnym$\}$ jest niepusty. Wybieramy element najmniejszy i oznaczamy k_0

Z definicji mamy więc: $x_1 = a + (k_0 - 1)\cdot\frac{1}{2}$ nie jest ograniczeniem górnym A, $y_1 = a + k_0 \cdot \frac{1}{2}$ jest ograniczeniem górnym A, $x_1 < y_1$, $y_1 - x_1 = 1$.

- Liczba $(x_1+y_1)/2$ leży po środku między x_1 a y_1. Sprawdzamy, czy jest ona ograniczeniem górnym. Jeśli tak to kładziemy $y_2 := \frac{x_1+y_1}{2}$, $x_2 := x_1$. Jeśli nie, to kładziemy $x_2 := \frac{x_1+y_1}{2}$, $y_2 := y_1$.

Mamy teraz $x_1 \leq x_2 < y_2 \leq y_1$, x_2 nie jest a y_2 jest ograniczeniem górnym
$y_2 - x_2 = \frac{1}{4}$

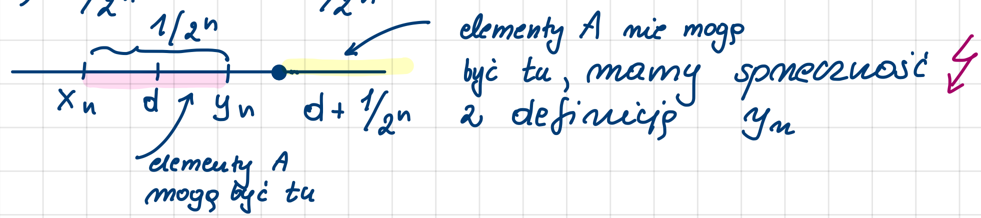
- Rozważamy $\frac{x_2+y_2}{2}$. Ponownie badamy czy jest to ograniczenie górne stosownie definiując x_3 i y_3. Mamy

$x_1 \leq x_2 \leq x_3 < y_3 \leq y_2 \leq y_1$; $y_3 - x_3 = 1/8 = 1/2^3$ x_3 nie jest, y_3 jest ograniczeniem górnym A

- W ten sposób konstruujemy ciągi $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$, pierwszy rosnący, drugi malejący, takie że $x_n < y_n$, $y_n - x_n = 1/2^n$

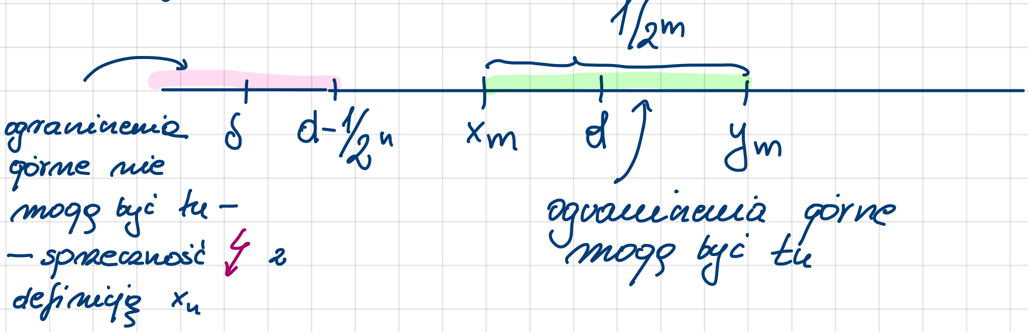
Zgodnie z aksjomatem zupełności istnieje liczba d taka, że $x_n \leq d \leq y_n$. Pokażemy, że ta liczba to $\sup A$. Musimy najpierw pokazać, że d jest ograniczeniem górnym. Zrobimy to metodą ad absurdum: Załóżmy, że d nie jest ograniczeniem górnym. Istnieje zatem $b\in A$ i $b > d$. Wobec tego $b - d > 0$ i istnieje n takie, że

$2^n(b-d) > 1$, $(b-d) > 1/2^n$ $b > d + 1/2^n$



Teraz dowodzimy a.a. że d jest najmniejszym ograniczeniem górnym. Załóżmy, że istnieje $\delta < d$ i δ jest ograniczeniem górnym. Wtedy $d - \delta > 0$ i istnieje m takie, że $2^m(d-\delta) > 1$ czyli $d - \delta > 1/2^m$

$\delta < d - 1/2^m$



UWAGA: Kres górny zbioru nazywamy też **supremum** a kres dolny **infimum**. Kresy mogą, ale nie muszą należeć do „swoich" zbiorów

PRZYKŁAD: Czym się różni $\mathbb{R}$ od $\mathbb{Q}$? Rozważmy w $\mathbb{Q}\,(\subset \mathbb{R})$ równanie

$$x^2 = 2 \qquad (x>0)$$

Załóżmy, że $x = p/q$ $p,q \in \mathbb{N}$. Wtedy $\frac{p^2}{q^2} = 2$ $p^2 = 2q^2$ Prawa strona jest parzysta zatem lewa też musi być parzysta. Oznacza to że w rozkładzie p na czynniki jest 2: $p = 2k$. Mamy więc $(2k)^2 = 2q^2 \Rightarrow 2k^2 = q^2$. Teraz lewa jest parzysta zaś prawa nie, jeśli zaczęliśmy od nieskracalnego ułamka. Zatem $x: x^2=2$ nie jest wymierne. Z drugiej strony można udowodnić, że dwa ciągi

$$y_n = \frac{5y_{n-1}+2}{2y_{n-1}+1} \quad y_1 = 2 \qquad \text{i} \qquad z_n = \frac{5z_{n-1}+2}{2z_{n-1}+1} \quad z_1 = 5/2$$

są takie jak w aksjomacie zupełności, a liczba, która się między nimi mieści to $1+\sqrt{2}$. Po poprawieniu o 1 otrzymujemy dwa ciągi $y_n - 1$ i $z_n - 1$ jak w aksjomacie i z liczbą $\sqrt{2}$ między nimi. Dowód ścisły pojawi się później.