

Cięgiem o wyrazach w X nazywamy odwzorowanie $x: \mathbb{N} \rightarrow X$. Zamiast $x(n)$ piszemy x_n . Zamiast $x: \mathbb{N} \rightarrow X$ piszemy $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ albo po prostu (x_n) . W dalszym ciągu mówimy o ciągach o wyrazach w $\mathbb{R}$, czyli o ciągach liczb rzeczywistych.

Mówimy że ciąg jest **ograniczony** jeśli zbiór jego wyrazów jest ograniczony. Można też powiedzieć **ciąg ograniczony z dołu** lub **z góry**. Określenie to odnoszę się do zbioru wyrazów.

Mówimy że ciąg jest **malejący** jeśli $\forall n \quad x_{n+1} \leq x_n$, **rosnący** jeśli $\forall n \quad x_{n+1} \geq x_n$. Używamy określeń **ściśle malejący** lub **ściśle rosnący** jeśli nierówności są ostre. Ciągi rosnące i malejące określamy wspólnie jako **monotoniczne**.

DEFINICJA: Granicę ciągu (x_n) nazywamy liczbę g spełniającą warunek:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} : \forall n > N \quad |x_n - g| < \varepsilon$$

Piszemy $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = g$. Mówiąc mniej formalnie, dla każdego $\varepsilon > 0$ w odanku $[g - \varepsilon, g + \varepsilon]$ leżą prawie wszystkie wyrazy ciągu (x_n) .

Wszystkie poza skończoną liczbą

Ciąg, który ma granicę nazywamy **zbieżnym**. Używamy także oznaczeń

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = +\infty$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = -\infty$$

$$\forall M \in \mathbb{R} \quad \exists N \in \mathbb{N} : \forall n > N \quad x_n > M$$

$$\forall M \in \mathbb{R} \quad \exists N \in \mathbb{N} : \forall n > N \quad x_n < M$$

STWIERDZENIE Ciąg zbieżny ma dokładnie jedną granicę

DOWÓD Ciąg jest zbieżny, ten ma granicę. Oznaczmy ciąg (x_n) z granicę g . Założymy, że g' też jest granicą (x_n) . Ustalmy $\varepsilon > 0$ i weźmy N i N' takie że dla $n > N \quad |x_n - g| < \frac{\varepsilon}{2}$ i dla $n > N' \quad |x_n - g'| < \frac{\varepsilon}{2}$. Biorąc teraz $m > \max\{N, N'\}$ mamy

$$|g - g'| = |g - x_n + x_n - g'| \leq |g - x_n| + |x_n - g'| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \quad \text{czyli} \quad |g - g'| < \varepsilon.$$

Pamiętamy, że ε jest dowolne, w szczególności dowolnie małe. Dłżnica g i g' jest więc mniejsza od każdej liczby dodatniej. Musi więc być $g - g' = 0$, $g = g'$

Większość pracy będzie teraz polegała na sprawdzaniu zbieżności i poszukiwaniu granic ciągów.

PRZYKŁAD: Zbadajmy zbieżność ciągu $x_n = \sqrt{n^2+1} - \sqrt{n^2-1}$. Jest jasne, że zawsze $x_n > 0$. Zrobmy następujący rachunek:

$$x_n = \sqrt{n^2+1} - \sqrt{n^2-1} = \frac{n^2+1 - n^2+1}{\sqrt{n^2+1} + \sqrt{n^2-1}} = \frac{2}{\sqrt{n^2+1} + \sqrt{n^2-1}} \stackrel{n>1}{\leq} \frac{2}{2\sqrt{n^2-1}} = \frac{1}{\sqrt{n^2-1}}$$

$|x_n - 0| \leq \frac{1}{\sqrt{n^2-1}}$ ← czy dla dowolnego ε znajdziemy N takie że dla $n > N$
 hipotetyczne granice $\frac{1}{\sqrt{n^2-1}} < \varepsilon$? Oczywiście. Dla ustalonego $\varepsilon > 0$ bierzmy

$$\frac{1}{\sqrt{n^2-1}} < \varepsilon^2 \Leftrightarrow 1 < \varepsilon^2(n^2-1) \Leftrightarrow \frac{1}{\varepsilon^2} < n^2-1 \Leftrightarrow \frac{1}{\varepsilon^2} + 1 < n^2 \Leftrightarrow \frac{1-\varepsilon^2}{\varepsilon^2} < n^2$$

$$\Leftrightarrow \frac{\sqrt{1-\varepsilon^2}}{\varepsilon} < n \quad \text{tzn jeśli } \varepsilon > 1 \text{ to } n \text{ może być dowolne } > 1 \text{ czyli } N=1$$

a jeśli $\varepsilon < 1$ to $N > \frac{\sqrt{1-\varepsilon^2}}{\varepsilon}$. Wiadomo, że takie N istnieje. Wniosek $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$

Przykład prosty, dowód drugi... Przyda się kilka twierdzeń ułatwiających życie.

W dalszym ciągu udowodnimy pewną ilość przydatnych twierdzeń:

STWIERDZENIE 1. Ciąg zbieżny jest ograniczony.

DOWÓD: Ustalmy $\varepsilon > 0$ i weźmy N : dla $n > N$ $|x_n - g| < \varepsilon$. Wtedy prawie wszystkie (poza, być może $x_1, x_2, \dots, x_N$) wyrazy ciągu (x_n) są w odcinku $[g - \varepsilon, g + \varepsilon]$. Oznaczamy $m = \min\{x_1, x_2, \dots, x_N, g - \varepsilon\}$ $M = \max\{x_1, x_2, \dots, x_N, g + \varepsilon\}$ wtedy zbiór wyrazów ciągu zawiera się w odcinku $[m, M]$.

Twierdzenie odwrotne nie jest prawdziwe: $x_n = (-1)^n$ jest ograniczony, ale nie jest zbieżny.

TWIERDZENIE 2 Każdy ciąg monotoniczny i ograniczony jest zbieżny.

DOWÓD:

Dowodzimy dla ciągów rosnących. Niech $X = \{x_1, x_2, \dots\}$ $g = \sup X$. W szczegól-

ności oznacza to, że $\forall n \in \mathbb{N} \ x_n \leq g$. Udowodnimy, że g jest granicą (x_n) . Dowód a.o. założymy, że g nie jest granicą. Prawdziwe jest więc zdanie

23

$$\sim (\forall \varepsilon > 0 \ \exists N \in \mathbb{N} : \forall n > N \quad |g - x_n| < \varepsilon)$$

III

$$\exists \varepsilon > 0 : \forall N \in \mathbb{N} \ \exists m > N \quad |g - x_m| \geq \varepsilon$$

istnieje nieskończenie wiele wyrazów ciągu (x_n)

Ciąłe to zdanie po ludzku: Istnieje $\varepsilon > 0$ takie, że poza odcinkiem $]g - \varepsilon, g + \varepsilon[$ jest nieskończenie wiele wyrazów ciągu. Z założenia $g \geq x_n$ zatem tak naprawdę nieskończenie wiele wyrazów ciągu jest w przedziale $] -\infty, g - \varepsilon]$. Pamiętajmy ponadto, że ciąg jest rosnący. Jeśli więc $x_m > g - \varepsilon$ to także wszystkie $x_n > g - \varepsilon$ dla $n > m$. Oznacza to, że w odcinku $] -\infty, g - \varepsilon]$ są wszystkie wyrazy ciągu (x_n) , ten $X \subset] -\infty, g - \varepsilon]$. Ale wtedy $\sup X < g \rightarrow$ **sprzeczność**. g jest więc granicą (x_n) .

PRZYKŁAD: Ciąg $x_n = (1 + \frac{1}{n})^n$ jest rosnący i ograniczony. Istotnie

$$\begin{aligned} \frac{x_{n+1}}{x_n} &= \frac{(1 + \frac{1}{n+1})^{n+1}}{(1 + \frac{1}{n})^n} = (1 + \frac{1}{n}) \left[\frac{1 + \frac{1}{n+1}}{1 + \frac{1}{n}} \right]^{n+1} = (1 + \frac{1}{n}) \left[\frac{1 + \frac{1}{n} - \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1}}{1 + \frac{1}{n}} \right]^{n+1} \\ &= (1 + \frac{1}{n}) \cdot \left[1 + \frac{\frac{n-m-1}{m(m+1)}}{1 + \frac{1}{n}} \right]^{n+1} = (1 + \frac{1}{n}) \left[1 - \frac{1/n(n+1)}{(1 + 1/n)} \right]^{n+1} \geq \\ &\geq (1 + \frac{1}{n}) \left[1 - \frac{1/n(n+1)}{1 + 1/n} \right] = \\ &= 1 + \frac{1}{n} - \frac{1}{n} = \underline{1} \quad \frac{x_{n+1}}{x_n} \geq 1 \Rightarrow x_{n+1} \geq x_n \end{aligned}$$

$$(1 + \frac{1}{n})^n = 1 + n \cdot \frac{1}{n} + \binom{n}{2} \frac{1}{n^2} + \dots + \binom{n}{k} \frac{1}{n^k} + \dots + \frac{1}{n^n} = 1 + 1 + \frac{(n-1)n}{2! n^2}$$

$$+ \frac{(n-2)(n-1)n}{3! n^3} + \dots + \frac{(n-k+1)(n-k+2) \dots n}{k! n^k} + \dots + \frac{n! (n-1)!}{n! n^{n-1}} \leq$$

$$\leq 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{k!} + \dots + \frac{1}{n!} \leq 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2^{k-1}} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}} \leq 3$$

Drugie przydatne twierdzenie dotyczące ciągów to:

TWIERDZENIE (o trzech ciągach)

Niech $(x_n), (y_n), (z_n)$ będą ciągami takimi, że $\forall n \in \mathbb{N} \quad x_n \leq y_n \leq z_n$.

Jeśli $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} z_n = g$, to także $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = g$

DOWÓD: Ustalmy $\varepsilon > 0$ i znajdziemy N_x i $N_z \in \mathbb{N}$ takie, że dla $n > N_x$

$|x_n - g| < \varepsilon$, dla $n > N_z$ $|z_n - g| < \varepsilon$. Inaczej zapiszemy

$$x_n \in]g - \varepsilon, g + \varepsilon[\Rightarrow g - \varepsilon < x_n$$

$$z_n \in]g - \varepsilon, g + \varepsilon[\Rightarrow z_n < g + \varepsilon \quad \text{Weźmy teraz } n > \max\{N_x, N_z\}$$

$$g - \varepsilon < x_n \leq y_n \leq z_n < g + \varepsilon \Rightarrow |y_n - g| < \varepsilon \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = g$$

PRZYKŁAD:

$$x_n = \sqrt[n]{n} \quad \text{weźmy} \quad a_n = \sqrt[n]{n} - 1 \quad a_{n+1} = \sqrt[n]{n} \quad n = (1 + a_n)^n$$

$$n = (1 + a_n)^n = 1 + n a_n + \binom{n}{2} a_n^2 + \dots \geq 1 + n a_n + \binom{n}{2} a_n^2$$

$$n - 1 \geq \frac{n(n-1)}{2} a_n^2$$

$$\frac{2}{n} \geq a_n^2$$

$$0 \leq a_n \leq \sqrt{\frac{2}{n}}$$

$$\lim a_n = 0$$

$$\downarrow$$

$$\lim \sqrt[n]{n} = 1$$

STWIERDZENIE (Operacje na ciągach zbieżnych)

$(x_n), (y_n)$ zbieżne, $\lim x_n = g \quad \lim y_n = h$

(i) $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} (\alpha x_n + \beta y_n) = \alpha g + \beta h$

(ii) $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n y_n) = gh$

(iii) Jeśli $y_n \neq 0$ i $h \neq 0$ to $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{y_n} = \frac{g}{h}$

DOWÓD:

(i) $|\alpha x_n + \beta y_n - \alpha g - \beta h| \leq |\alpha| |x_n - g| + |\beta| |y_n - h|$ Ustalmy $\varepsilon > 0$ i weźmy n takie, że $|x_n - g| < \frac{\varepsilon}{2|\alpha|}$ i $|y_n - h| < \frac{\varepsilon}{2|\beta|}$ wtedy

$$|\alpha x_n + \beta y_n - \alpha g - \beta h| \leq |\alpha| |x_n - g| + |\beta| |y_n - h| \leq |\alpha| \frac{\varepsilon}{2|\alpha|} + |\beta| \frac{\varepsilon}{2|\beta|} = \varepsilon$$

$$(ii) |x_n y_n - g h| = |x_n y_n - g y_n + g y_n - g h| \leq |x_n - g| |y_n| + |g| |y_n - h| \leq *$$

Cipg (y_n) jest zbieżny, więc ograniczony. Mamy $|y_n| \leq M$

$$N_x: \forall n > N_x \quad |x_n - g| < \frac{\varepsilon}{2M} \quad N_y: \forall n > N_y \quad |y_n - h| < \frac{\varepsilon}{2|g|}$$

$$\text{dla } n > \max\{N_x, N_y\}$$

$$* \leq M \frac{\varepsilon}{2M} + |g| \frac{\varepsilon}{2|g|} = \varepsilon$$

$$(iii) \frac{x_n}{y_n} - \frac{g}{h} = \frac{h x_n - g y_n}{h y_n} = \frac{h x_n - g h + g h - g y_n}{h y_n} = \frac{h(x_n - g) + g(h - y_n)}{h y_n}$$

Cipg (y_n) jest zbieżny do liczby różnej od zera. Wobec tego istnieje N takie, że dla $n > N$ $|y_n| > \frac{h}{2}$. Ponadto ustalamy $\varepsilon > 0$ i bierzemy

$$N_x: \text{dla } n > N_x \quad |x_n - g| < \frac{\varepsilon h}{4}, \quad N_y: \text{dla } n > N_y \quad |h - y_n| < \frac{h^2}{4g} \varepsilon$$

$$\text{Wtedy dla } n > \max\{N, N_x, N_y\}$$

$$\leq \frac{h \cdot \frac{\varepsilon h}{4} + g \cdot \frac{h^2}{4g} \varepsilon}{h^2/2} = \frac{\varepsilon \frac{h^2}{2}}{h^2/2} = \varepsilon.$$

Cipgi Cauchy'ego o których mowa będzie za chwilę odgrywają ważną w matematyce rolę zarówno od strony praktycznej jak i teoretycznej.

DEFINICJA

Niech (x_n) będzie cipgiem licbowym. Mówimy, że (x_n) spełnia **warunek Cauchy'ego** jeśli

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N > 0 \forall m, n > N \quad |x_n - x_m| < \varepsilon$$

Twierdzenie w $\mathbb{R}$ cipg spełnia warunek Cauchy'ego wtedy i tylko wtedy i tylko wtedy gdy jest zbieżny

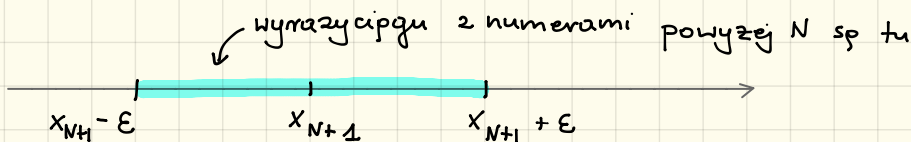
DOWÓD: $\Leftarrow$ Załóżmy, że (x_n) jest zbieżny do g . Ustalmy $\varepsilon > 0$; znajdziemy N takie, że dla $n > N$ $|x_n - g| < \frac{\varepsilon}{2}$. Weźmy $n, m > N$

$$|x_m - x_n| = |x_m - g + g - x_n| \leq |x_n - g| + |x_m - g| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

$\Rightarrow$ Dowód w drugą stronę jest trudniejszy. Żeby zrozumieć dlaczego, wystarczy zauważyć, że w ciele $\mathbb{Q}$ twierdzenie w tę stronę nie zachodzi. Różnica polega więc na zupełności. Najpierw zauważmy, że ciąg Cauchy'ego jest ograniczony. Istotnie: ustalmy $\varepsilon > 0$ i weźmy N jak w warunku Cauchy'ego. Wtedy dla $m, n > N$ $|x_m - x_n| < \varepsilon$. W szczególności $\forall m > N$ $|x_{N+1} - x_m| < \varepsilon$. Wszystkie wyrazy ciągu z indeksami większymi niż N są w odcinku $]x_{N+1} - \varepsilon, x_{N+1} + \varepsilon[$. Weźmy

$$m = \min \{x_1, \dots, x_N, x_{N+1} - \varepsilon\} \\ M = \max \{x_1, \dots, x_N, x_{N+1} + \varepsilon\} \quad \{x_1, \dots, x_N, \dots\} \subset [m, M]$$

Zdefiniujmy teraz dwa ciągi $m_n = \inf \{x_n, x_{n+1}, \dots\}$, $M_n = \sup \{x_n, x_{n+1}, \dots\}$. Oczywiście $m_n \leq M_n$ oraz m_n rosnący a M_n malejący. Z aksjomatu ④ istnieje $m_n \leq g \leq M_n$. Pokażemy, że jest jedyny: znowu ustalmy $\varepsilon > 0$ i N jak w w.c.



$$\{x_{N+1}, x_{N+2}, \dots\} \subset]x_{N+1} - \varepsilon, x_{N+1} + \varepsilon[$$

$$\Downarrow \\ m_{N+1} \geq x_{N+1} - \varepsilon$$

$$M_{N+1} \leq x_{N+1} + \varepsilon$$

$$|m_{N+1} - M_{N+1}| \leq 2\varepsilon$$

Mozemy znaleźć N takie, że m_{N+1} i M_{N+1} różnią się o dowolnie małą liczbę. Wobec tego g jest jedno i $g = \lim m_n = \lim M_n$.



Baron Augustin-Louis Cauchy
1789-1857 Francja

"M. Cauchy announces that, in order to conform to the wishes of the Council [of Instruction of the École Polytechnique], he will no longer give, as he has until the present, completely rigorous demonstrations."

Statement by Cauchy after being criticized by the Council of Instruction for using time that should have been devoted to applications of the calculus in his lectures to second-year engineering students in order to discuss abstruse questions of rigor [e.g. the existence of the definite integral for continuous functions and the existence and uniqueness of solutions of the Cauchy problem for first-order ordinary differential equations], "a luxury of analysis undoubtedly suitable for papers to be read at the [National] Institute [of Arts and Sciences] but superfluous for teaching the students of the École."

LIMES SUPERIOR, LIMES INFERIOR

(Janusz Zajdel)

DEFINICJA Niech (x_n) będzie ciągiem rzeczywistym. Oznaczmy $X_n = \{x_i : i \geq n\} = \{x_n, x_{n+1}, \dots\}$

$$M_n = \sup X_n, \quad m_n = \inf X_n \quad M_n \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}, \quad m_n \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$$

$$\limsup x_n = \inf \{M_n : n \in \mathbb{N}\} \quad \liminf x_n = \sup \{m_n : n \in \mathbb{N}\}$$

$\limsup$ i $\liminf$ istnieją dla każdego ciągu, mogą być nieskończone

PRZYKŁAD: $x_n = (-1)^n + \frac{1}{n}$

$x_1 = 0$	$M_1 = \frac{3}{2}$	$m_1 = -1$
$x_2 = \frac{3}{2}$	$M_2 = \frac{3}{2}$	$m_2 = -1$
$x_3 = -\frac{2}{3}$	$M_3 = \frac{5}{4}$	$m_3 = -1$
$x_4 = \frac{5}{4}$	$M_4 = \frac{5}{4}$	$\vdots$
$x_5 = -\frac{4}{5}$	$M_5 = \frac{3}{6}$	
$x_6 = \frac{3}{6}$	$M_6 = \frac{3}{6}$	
$x_7 = -\frac{6}{7}$	$M_7 = \frac{9}{8}$	
$\vdots$	$\vdots$	



$\limsup \left((-1)^n + \frac{1}{n} \right) = 1$ $\liminf \left((-1)^n + \frac{1}{n} \right) = -1$

PRZYKŁAD (*) $x_n = \frac{n}{1 + E(\sqrt{n})} - E(\sqrt{n})$ $\liminf x_n = -1$ $\limsup x_n = 1$

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	...	n
1	1	1	2	2	2	2	2	3	3	3	3	3	3	3	4	4	4	...	k
0	1	2	0	1	2	3	4	0	1	2	3	4	5	6	0	1	2	...	l

$m = k^2 + l$ $k \in \mathbb{N}$, $l \in \{0, 1, \dots, 2k\}$
 $E(\sqrt{n}) = k$

$$x_n = \frac{k^2 + l}{1 + k} - k = \frac{k^2 - k - k^2 + l}{1 + k} = \frac{l - k}{1 + k}$$



$k=1$, $l=0, 1, 2$	$x_1 = -\frac{1}{2}$	$x_2 = 0$	$x_3 = \frac{1}{2}$			
$k=2$, $l=0, 1, 4$	$x_4 = -\frac{2}{3}$	$x_5 = -\frac{1}{3}$	$x_6 = 0$	$x_7 = +\frac{1}{3}$	$x_8 = \frac{2}{3}$	
$k=3$, $l=0, 1, 6$	$x_9 = -\frac{3}{4}$	$x_{10} = -\frac{2}{4}$	$x_{11} = -\frac{1}{4}$	$x_{12} = 0$	$x_{13} = \frac{1}{4}$	$x_{15} = \frac{2}{4}$...

DEFINICJA Punktem skupienia ciągu (x_n) nazywamy liczbę $h \in \mathbb{R}$ taką, że dla dowolnego $\varepsilon > 0$ w odcinku $]h - \varepsilon, h + \varepsilon[$ jest nieskończoność wyrazów ciągu. $\forall \varepsilon > 0 \quad \forall N \in \mathbb{N} \quad \exists m > N \quad |h - x_m| < \varepsilon$ $\Leftrightarrow$ jest punktem skupienia ciągu nieograniczony z góry $-\infty \dots$ z dołu

$(\forall \varepsilon > 0 \quad \exists^* m \in \mathbb{N} \quad |x_m - h| < \varepsilon)$

Granica, jeśli istnieje, jest (jedynym) punktem skupienia ciągu. Ciąg $n \mapsto (-1)^n + \frac{1}{n}$ ma dwa punkty skupienia. **Ilę punktów skupienia ma ciąg z punktu (*)?**

Niech $k: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ będzie odwzorowaniem ściśle rosnącym. Zamiast $k(n)$ piszemy k_n . **Podciągiem** ciągu (x_n) nazywamy ciąg (y_n) dany wzorem $y_n = x_{k_n}$. Podciąg zawiera niektóre wyrazy ciągu, nieskończoność wiele, w takim porządku w jakim występowały w wyjściowym ciągu.

STWIERDZENIE: Punkt skupienia ciągu jest granicą pewnego podciągu.

DOWÓD: Niech $r \in \mathbb{R}$ będzie punktem skupienia ciągu (x_n) . Z definicji punktu skupienia wynika, że w odcinku $]r - 1, r + 1[$ jest nieskończoność wyrazów ciągu. Wybieramy dowolny wyraz spośród zawartych w tym odcinku: x_{k_1} będzie on pierwszym wyrazem podciągu. Następnie zmniejszamy odcinek: $]r - \frac{1}{2}, r + \frac{1}{2}[$. W tym odcinku jest też nieskończoność wyrazów ciągu. Wybieramy jeden z nich: x_{k_2} dla $k_2 > k_1$. Następnie ponownie zmniejszamy odcinek: $]r - \frac{1}{3}, r + \frac{1}{3}[$ i wybieramy x_{k_3} , $k_3 > k_2$. W ten sposób konstruujemy podciąg (x_{k_n}) ciągu (x_n) . Wiadomo, że $x_{k_n} \in]r - \frac{1}{n}, r + \frac{1}{n}[$ zatem $|x_{k_n} - r| < \frac{1}{n}$, co pokazuje, że $\lim_{n \rightarrow \infty} x_{k_n} = r$.

STWIERDZENIE Granice górna ciągu jest kresem górnym zbioru punktów skupienia tego ciągu. Granice dolne jest kresem dolnym zbioru punktów skupienia ciągu.

SZKIC DOWÓDU Kompletny dowód jest nietrudny ale znużający. Zrobimy zatem tylko szkic. Rozpatrzmy przypadek ciągu takiego, że $\limsup x_n = c$ i $c \in \mathbb{R}$, tzn jest to liczba skończona. Pokażemy, że c jest punktem skupienia (x_n) i że nie ma większych punktów skupienia.

$c = \limsup x_n = \inf_n \sup_{M_n} \{x_n, x_{n+1}, \dots\}$ Skoro $c = \inf \{M_n : n \in \mathbb{N}\}$ to znaczy, że

$\forall n \quad M_n \geq c$ i (M_n) jest malejący. Jest to ciąg malejący i ograniczony z dołu, a więc zbieżny. Z dowodu stosownego twierdzenia wynika, że

$c = \lim M_n$. Z definicji granicy znajdziemy dla każdego $\varepsilon > 0$ takie N_ε , że dla $n > N_\varepsilon$ $M_n \in [c, c + \varepsilon[$. Zaczniemy od $\varepsilon = 1$; wyznaczamy N_1 , tzn. $M_{N_1+1} \in [c, c+1[$. $M_{N_1+1} = \sup \{x_{N_1+1}, x_{N_1+2}, \dots\}$, tzn. istnieje x_{N_1+k} taki, że $x_{N_1+k} \in]M_{N_1+1} - 1, M_{N_1+1}]$. Ostatecznie $x_{N_1+k} \in]c-1, c+1[$. Zaczynamy definiować ciąg (φ_n) o wartościach w $\mathbb{N}$ i rosnący kładąc $\varphi_1 = N_1 + k$.

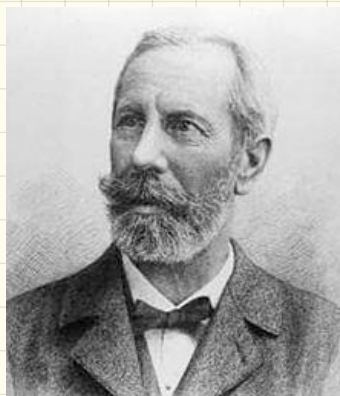
Dalej bierzemy $\varepsilon = \frac{1}{2}$ i powtarzamy procedurę dobijąc by $N_2 > N_1 + k$. Otrzymujemy $x_{N_2+k_2} \in]c - \frac{1}{2}, c + \frac{1}{2}[$ i $\varphi_2 = N_2 + k_2$.

Podobnie dla $\varepsilon = \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots$. Z konstrukcji widać, że (x_{φ_n}) jest zbieżny do c , więc c jest punktem skupienia (x_n) . Pozostaje pokazać, że nie ma większego punktu skupienia. Załóżmy, że jest: $c' > c$ wtedy istnieje nieskończenie wiele wyrazów ciągu (x_n) większych od $\frac{c+c'}{2}$. I jednocześnie istnieje N takie, że dla $n > N$ $M_n \in [c, \frac{c+c'}{2}[$, czyli $x_n \in]-\infty, \frac{c+c'}{2}[$ zatem prawie wszystkie wyrazy ciągu są mniejsze od $\frac{c+c'}{2} \rightarrow$ **sprzeczność**.

Otto Stolz

1842 (Hall in Tirol)

1905 (Wiedeń)



TWIERDZENIE STOLZA

$(x_n), (y_n)$ są ciągami rzeczywistymi, (y_n) jest od pewnego miejsca rosnący oraz $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = \infty$. Jeśli istnieje granica

$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1} - x_n}{y_{n+1} - y_n}$ to istnieje $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{y_n}$ i obie granice są równe.

DOWÓD: Zanim przejdziemy do właściwego dowodu, zauważmy że jeśli dla $i \in \{1, \dots, N\}$, $\nu_i > 0$ $\frac{u_i}{\nu_i} \in [a, b]$, to także $\frac{\sum u_i}{\sum \nu_i} \in [a, b]$

istotnie $a \leq \frac{u_i}{v_i} \leq b \Rightarrow a v_i \leq u_i \leq b v_i \Rightarrow \sum_i a v_i \leq \sum_i u_i \leq \sum_i b v_i$
 $\Rightarrow a \sum v_i \leq \sum u_i \leq b \sum v_i \Rightarrow a \leq \frac{\sum u_i}{\sum v_i} \leq b$

I Rozważmy teraz przypadek gdy $\frac{x_{n+1}-x_n}{y_{n+1}-y_n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} a \quad a \in \mathbb{R}$
 Dla ustalonego $\varepsilon > 0$ i wystarczająco dużego n ($n \geq N$) mamy

$$a - \varepsilon/2 \leq \frac{x_{n+1}-x_n}{y_{n+1}-y_n} \leq a + \varepsilon$$

zachodzi więc dla

$\frac{x_{n+1}-x_n}{y_{n+1}-y_n}, \frac{x_n-x_{n-1}}{y_n-y_{n-1}}, \dots, \frac{x_{N+1}-x_N}{y_{N+1}-y_N}$, stosujemy poprzednią obserwację i dostajemy

$$a - \varepsilon/2 \leq \frac{x_{n+1}-x_N}{y_{n+1}-y_N} < a + \varepsilon/2 \quad \text{tzn} \quad \left| \frac{x_{n+1}-x_N}{y_{n+1}-y_N} - a \right| < \varepsilon/2$$

My jednak musimy szacować $\left| \frac{x_n}{y_n} - a \right|$:

$$\left(\frac{x_n}{y_n} - a \right) = \left(\frac{x_n - x_N}{y_n - y_N} - a \right) \frac{y_n - y_N}{y_n} + \frac{x_N}{y_n} - a \frac{y_N}{y_n}$$

$$\left| \frac{x_n}{y_n} - a \right| \leq \underbrace{\left| \frac{x_n - x_N}{y_n - y_N} - a \right|}_{< \varepsilon/2} \underbrace{\left| \frac{y_n - y_N}{y_n} \right|}_{< 1} + \underbrace{\left| \frac{x_N}{y_n} \right|}_{\downarrow 0} + \underbrace{|a| \left| \frac{y_N}{y_n} \right|}_{\downarrow 0} < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 < \varepsilon$$

Bierzemy n tak duże
 żeby te dodatki $< \varepsilon/2$

II Rozważamy przypadek $\frac{x_{n+1}-x_n}{y_{n+1}-y_n} \rightarrow +\infty$

Skoroby tak to dla wystarczająco dużych n $\frac{x_{n+1}-x_n}{y_{n+1}-y_n} > 1$. Zatem

$x_{n+1} - x_n > y_{n+1} - y_n > 0$ Oznacza to, że (x_n) jest rosnący od pewnego miejsca
 Założymy, że ma to miejsce dla $n \geq N$

$$\begin{aligned} x_{n+1} - x_n &> y_{n+1} - y_n \\ x_n - x_{n-1} &> y_n - y_{n-1} \\ &\vdots \end{aligned}$$

$$+ \frac{x_{N+1} - x_N > y_{N+1} - y_N}{x_{n+1} - x_N > y_n - y_N}$$

$$x_{n+1} > y_n + \underbrace{(x_N - y_N)}_{\text{const}}$$

Skoroby $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = \infty$ to także $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \infty$

Wtedy wersja I można zastosować do $\frac{y_{n+1}-y_n}{x_{n+1}-x_n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ bo (x_n) spełnia założenie.

III) dla $\frac{x_{n+1}-x_n}{y_{n+1}-y_n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} -\infty$ zamieniamy (x_n) na $(-x_n)$ i stosujemy II.

UWAGI: (1) Twierdzenie jest w jedną stronę, tzn. z istnienia $\lim \frac{x_n}{y_n}$ nie wynika dla $\lim \frac{x_{n+1}-x_n}{y_{n+1}-y_n}$ np.

$$x_n = (-1)^n + 1 \quad y_n = n \quad \frac{x_n}{y_n} \rightarrow 0 \quad \frac{x_{n+1}-x_n}{y_{n+1}-y_n} = \frac{(-1)^{n+1} - (-1)^n}{n+1-n} = -2(-1)^n \text{ nie ma granicy}$$

(2) Założenie $y_n \rightarrow \infty$ jest ważne

$$x_n = 1 - \frac{1}{n} \quad y_n = 2 - \frac{1}{n}$$

rośnie ale ograniczony

$$\frac{x_n}{y_n} \rightarrow \frac{1}{2} \quad \frac{x_{n+1}-x_n}{y_{n+1}-y_n} = \frac{1 - \frac{1}{n+2} - 1 + \frac{1}{n}}{2 - \frac{1}{n+1} - 2 + \frac{1}{n}} = 1$$

(3) Monotoniczność (y_n) jest ważne

$$x_n = \sqrt{n} + (-1)^n \quad y_n = \sqrt{n} - (-1)^n \quad \frac{x_n}{y_n} = \frac{\sqrt{n} + (-1)^n}{\sqrt{n} - (-1)^n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1$$

$$\frac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n} + (-1)^{n+1} - (-1)^n}{\sqrt{n+1} - \sqrt{n} - (-1)^{n+1} - (-1)^n} = \frac{\frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} - 2(-1)^n}{\frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} + 2(-1)^n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} (-1)$$

WNIOSEK Z TW. STOLZA:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} (x_{n+1} - x_n) \text{ jeśli granice po prawej istnieje.}$$

WNIOSEK Z TW. STOLZA i CIĄGŁOŚCI FUNKCJI $\log$:

Rozważamy $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{x_n}$. Zamiast tego można badać $\lim_{n \rightarrow \infty} \log \sqrt[n]{x_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log x_n}{n}$

Stosujemy poprzedni wniosek: Jeśli istnieje $\lim (\log x_{n+1} - \log x_n)$ to istnieje $\lim \frac{\log x_n}{n}$ i są równe. Ale $\log x_{n+1} - \log x_n = \log \frac{x_{n+1}}{x_n}$. Wniosekujemy, że

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{x_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} \text{ jeśli granica po prawej stronie istnieje.}$$