

The background of the page is white, decorated with numerous overlapping circles in various colors: red, teal, lime green, and dark grey. The circles vary in size and are scattered across the entire page.

SZEREGI LICZBOWE

Napis $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ oznacza parę ciągów rzeczywistych: $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ i $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ 1
gdzie $S_m = a_1 + a_2 + \dots + a_m = \sum_{k=1}^m a_k$

W niektórych sytuacjach $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ oznaczać będzie granicę $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$, czyli **sumę szeregu liczbowego**. Mówimy, że szereg liczbowy jest zbieżny jeśli granica istnieje i jest skończona.

Historycznie rzecz biorąc koncepcja istnienia skończonej sumy nieskończonej liczby składników następczoła trudności. Zainteresowani mogą poznać o **Zenonie z Elei**, w szczególności zapoznać się z paradoksem zółwia i Achillese. Używając się matematyki w toku nauki szkolnej pierwszy raz na szeregi liczbowe napotykamy przy okazji problemu zamiany ułamków zwykłych na ułamki dziesiętne. Okazuje się bowiem, że ułamki, których mianownik ma w rozkładzie na czynniki pierwsze czynniki inne niż 2 i 5 ma nieskończone rozwinięcie dziesiętne. Np:

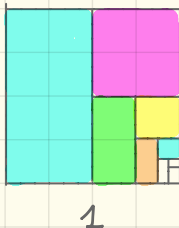
$$\frac{1}{3} = 0,333(3)$$

$$\frac{1}{7} = 0,142857142857(142857)$$

$$\begin{aligned} \frac{3}{10} + \frac{3}{100} + \frac{3}{1000} + \dots \\ = \sum_{n=1}^{\infty} 3 \cdot \frac{1}{10^n} \end{aligned}$$

$$\frac{142857}{10^6} + \frac{142857}{10^{12}} + \dots = 142857 \cdot \sum_{n=1}^{\infty} (10^{-6})^n$$

Jeszcze inny przykład:



$$\begin{aligned} \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \frac{1}{64} + \dots = \\ = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 1 \end{aligned}$$

Wszystkie powyższe przykłady to sumy szeregów geometrycznych, które policzyć jest względnie łatwo korzystając ze znanego wzoru:

$$1 - q^n = (1 - q)(1 + q + q^2 + \dots + q^{n-1}) \quad (1 + q + \dots + q^{n-1}) = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

$$1 + q + q^2 + \dots + q^n = \sum_{k=0}^n q^k = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} \quad \sum_{k=0}^{\infty} q^k = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n q^k = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

Skonieczona granica istnieje gdy $|q| < 1$. Wtedy $q^{n+1} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$.

$$\sum_{k=0}^{\infty} q^k = \frac{1}{1 - q}$$

W wielu przypadkach nie potrafimy znaleźć jawnego wzoru na wyrazy ciągu S_n . Chcielibyśmy umieć wyznaczyć się o zbieżności $\sum a_n$ na podstawie własności ciągu (a_n) . Ponieważ S_n jest po prostu szczególnego rodzaju ciągiem łatwo sprawdzić co daje znane twierdzenie o zbieżności ciągów w tym szczególnym przypadku. Zaczniemy od warunku Cauchy'ego:

dla dowolnego ciągu (x_n) :

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall m, n > N \quad |x_n - x_m| < \varepsilon$$

dla S_m

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall m, n > N \quad |S_m - S_n| < \varepsilon$$

↑ dla $m > n$

$$|a_m + a_{m-1} + \dots + a_{n+1}|$$

W szczególności jeśli $n = m-1$ mamy

$$|a_m| < \varepsilon \quad \text{czyli} \quad a_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

Warunek konieczny zbieżności: jeśli $\sum a_n$ zbieżny, tzn S_n jest ciągiem Cauchy'ego to $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$. Jest to jedynie **warunek konieczny**, wykazywanie w drugą stronę nie ma co pokazywać przykład

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty \quad \text{o którym było mowa wcześniej przy okazji całki}$$

Dirichleta

SZEREGI O WYRAZACH DODATWICH

3

W dalszym ciągu zajmować się będziemy szeregami, których wyrazy a_n są dodatnie (dodatnie dla prawie wszystkich n). W takim przypadku ciąg sum częściowych jest (od pewnego miejsca) monotonicznie rosnący. Wiadomo, że taki ciąg jest zbieżny jeśli jest ograniczony. Używając tego twierdzenie można rozstrzygnąć o zbieżności szeregu $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$:

$$S_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} = 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \dots + \frac{1}{n!} \leq 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}} = 2 + \left\{ \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}} \right\} \leq 2 + 1 = 3$$

Ograniczenie znaleźliśmy porównując szereg $\sum \frac{1}{n!}$ ze zbieżnym szeregiem $\sum \frac{1}{2^n}$ zauważając że $\frac{1}{n!} \leq \frac{1}{2^{n-1}}$. Ogólnie rzecz biorąc mamy twierdzenie

TWIERDZENIE PIERWSZE KRYTERIUM PORÓWNAWcze Niech (a_n) i (c_n) będą ciągami dodatnimi takimi, że dla prawie wszystkich n zachodzi $a_n \leq c_n$. Wówczas jeśli $\sum c_n$ jest zbieżny to $\sum a_n$ też jest zbieżny. Jeśli $\sum a_n$ jest rozbieżny to także $\sum c_n$ jest rozbieżny.

Dawid jest oczywisty, więc nie będziemy go zapisywać. Pierwsze kryterium porównawcze jest bardzo ważne - w ostatecznym rozrachunku wszystkie inne kryteria wynikają z niego pośrednio. Skuteczne bezpośrednio jest jednak jedynie wtedy, gdy mamy do porównania odpowiednio dużo różnych szeregów zbieżnych i rozbieżnych. Jak mawiać w "bazie danych" mamy

Zbieżne: $\sum q^n$ dla $|q| < 1$, $\sum \frac{x^n}{n!}$ w szczególności $\sum \frac{1}{n!}$

Rozbieżne $\sum \frac{1}{n}$, $\sum q^n$ $|q| \geq 1$.

Bazę danych rozszerzymy stosując **lemat o zagęszczaniu**.

LEMAT O ZAGĘSZCZANIU

Niech (a_n) będzie mrosnącym ciągiem wyrazów dodatnich. Szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny wtedy i tylko wtedy gdy zbieżny jest szereg $\sum_{k=1}^{\infty} 2^k a_{2^k}$

DOWÓD:

$$\text{Niech } S_m = \sum_{i=1}^m a_i \quad R_k = \sum_{j=1}^k 2^j a_{2^j}$$

$$S_{2^k} = a_1 + a_2 + \underbrace{a_3 + a_4}_{\geq a_4 + a_4} + \underbrace{a_5 + a_6 + a_7 + a_8}_{\geq a_8 + a_8 + a_8 + a_8} + \underbrace{a_9 + a_{10} + a_{11} + a_{12} + a_{13} + a_{14} + a_{15} + a_{16}}_{1 \times a_{16}} + \dots + \underbrace{a_{2^{k-1}} + \dots + a_{2^k}}_{2^{k-1} a_{2^k}} \geq$$

$$a_1 + a_2 + 2a_4 + 4a_8 + 8a_{16} + \dots + 2^{k-1} a_{2^k} = a_1 + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^k 2^j a_{2^j} = a_1 + \frac{1}{2} R_k$$

$$S_{2^k} \geq a_1 + \frac{1}{2} R_k$$

$$S_{2^{k-1}} = a_1 + \underbrace{a_2 + a_3}_{\leq a_2 + a_2} + \underbrace{a_4 + a_5 + a_6 + a_7}_{a_4 + a_4 + a_4 + a_4} + \underbrace{a_8 + a_9 + a_{10} + a_{11} + a_{12} + a_{13} + a_{14} + a_{15} + a_{16} + \dots}_{8a_8}$$

$$\underbrace{\dots + a_{2^{k-1}}}_{\leq 2} \leq a_1 + 2a_2 + 4a_4 + 8a_8 + \dots + 2^{k-1} a_{2^{k-1}} = R_{k-1} + a_1$$

$$S_{2^{k-1}} \leq a_1 + R_{k-1}$$

Założmy zatem, że ciąg (R_k) jest zbieżny. Z monotoniczności (R_k) wynika, że $\left(\lim_{k \rightarrow \infty} R_k = R \right) \quad \forall_k \quad R_k \leq R$. Mamy więc

$$S_{2^{k-1}} \leq a_1 + R \quad \text{Ponadto } \forall n \in \mathbb{N} \exists k: n \leq 2^{k-1}$$

zatem $S_m \leq S_{2^{k-1}} \leq a_1 + R$. Ciąg (S_m) jest więc ograniczony. Z monotoniczności S_m wynika zbieżność (S_m) .

Niech teraz S_m będzie zbieżny. Z monotoniczności S_m wynika, że S_m ograniczony i $\forall n \quad S_m \leq S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_m$ zatem

$$S \geq S_{2^{k-1}} \geq a_1 + R_k$$

ciąg (R_k) jest więc ograniczony i zbieżny.

5

Jest oczywiste że jeśli $R_k \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \infty$ to $S_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty$ co wynika z nierówności **zielonej** i odwrotnie, jeśli $S_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty$ to także $R_k \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \infty$ co wynika z nierówności **niebieskiej**. ■

Zastosujemy lemat o zagęszczaniu do $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ $p > 0, p \in \mathbb{R}$ i tu rozważamy

$$\sum 2^k \frac{1}{(2^k)^p} = \sum \frac{2^k}{2^{kp}} = \sum \frac{1}{2^{kp-k}} = \sum \left(\frac{1}{2^{p-1}} \right)^k$$

Otrzymaliśmy szereg geometryczny o ilorazie $\frac{1}{2^{p-1}}$. Wiemy że szereg ten jest zbieżny dla $|q| < 1$ i tu

$$\left| \frac{1}{2^{p-1}} \right| < 1 \quad 1 < 2^{p-1} \quad \text{i.e. } p > 1.$$

Szereg $\sum \frac{1}{n^p}$ jest zbieżny dla $p > 1$ i rozbieżny dla $p \leq 1$.

Szeregi $\sum \frac{1}{n^p}$ bardzo się przydają do badania zbieżności szeregów różnorodnych. Zwłaszcza w kontekście poniższego kryterium:

TWIERDZENIE DRUGIE KRYTERIUM PORÓWNAWCZE

Niech (a_n) i (b_n) będą ciągami wyrazów nieujemnych, $b_n \neq 0$

$$m = \liminf \frac{a_n}{b_n} \quad M = \limsup \frac{a_n}{b_n}$$

Jeśli $\sum b_n$ jest zbieżny i $M < \infty$ to $\sum a_n$ jest zbieżny.

Jeśli $\sum b_n$ jest rozbieżny i $m > 0$ to $\sum a_n$ jest rozbieżny.

DOWÓD. Niech $\sum b_n$ będzie zbieżny i $M < \infty$. Przypominamy, że granica górna jest kresem górnym zbioru punktów skupienia. Jeśli $M < \infty$ to istnieje $c \geq M$, c skończony i taki, że prawie wszystkie wyrazy ciągu

$a_n/b_m < c$. Wtedy dla prawie wszystkich n $a_n < c b_m$ i możemy skorzystać z pierwszego kryterium porównawczego.

6

Ważmy teraz $\sum b_n$ rozbieżny i $m > 0$. Granica dolna jest kresem dolnym zbioru punktów skupienia ciągu a_n/b_m . Dla każdej liczby $d: 0 > d > c$ zachodzi warunek: prawie wszystkie wyrazy ciągu a_n/b_m są większe niż d . Mamy więc, dla prawie wszystkich n

$$\frac{a_n}{b_m} > d \Rightarrow a_n > d \cdot b_m \text{ i ponownie możemy skorzystać}$$

z pierwszego kryterium porównawczego. ■

PRZYKŁAD: Zbadajmy zbieżność szeregu

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2+\sqrt{n}}{1+n^2} \quad \text{"Na oko" widać, że wyraz ogólny szeregu}$$

"zachowuje się" jak $\frac{1}{n^p}$ dla $p = \frac{3}{2}$, spodziewamy się więc, że nasz szereg będzie zbieżny. Wybieramy $b_m = \frac{1}{\sqrt{n}^3}$ i

liczymy

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_m} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2+\sqrt{n})\sqrt{n}^3}{1+n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2\sqrt{n}^3 + n^2}{1+n^2} = 1 < \infty$$

Istnieje jeszcze trzecie kryterium porównawcze, ale prawdę mówiąc nigdy nie udało mi się go do niczego użyć. Dla porządku zanotujmy

TWIERDZENIE TRZECIE KRYTERIUM PORÓWNAWCZE

Niech $(a_n), (b_n)$ będą ciągami o wyrazach dodatnich. Jeśli dla prawie wszystkich n zachodzi

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \frac{b_{n+1}}{b_n}$$

to że zbieżności $\sum b_n$ wynika zbieżność $\sum a_n$, z rozbieżności $\sum a_n$

wynika rozbieżność $\sum b_n$.

7

DOWÓD Ponownie korzystamy z pierwszego kryterium porównawczego. Jeśli nierówność zachodzi dla prawie wszystkich n , to zachodzi dla wyrostków $n \geq N$ dla pewnego N

$$\frac{a_n}{a_N} = \frac{a_n}{a_{n-1}} \frac{a_{n-1}}{a_n} = \frac{a_n}{a_{n-1}} \frac{a_{n-1}}{a_{n-2}} \dots \frac{a_{N+1}}{a_N} \leq \frac{b_n}{b_{n-1}} \frac{b_{n-1}}{b_{n-2}} \dots \frac{b_{N+1}}{b_N} = \frac{b_n}{b_N}$$
$$\leq \frac{b_n}{b_{n-1}} \leq \frac{b_{n-1}}{b_{n-2}} \dots \leq \frac{b_{N+1}}{b_N} \quad \Downarrow$$

$$\frac{a_n}{a_N} \leq \frac{b_n}{b_N} \Rightarrow a_n \leq \underbrace{\frac{a_N}{b_N}}_{\text{const.}} b_n$$

Jeśli do porównania używamy szeregu geometrycznego otrzymujemy dwa klasyczne kryteria: Cauchy'ego i d'Alemberta

Twierdzenie Kryterium Cauchy'ego

$$(a_n): a_n \geq 0 \quad \alpha = \limsup \sqrt[n]{a_n}$$

Jeśli $\alpha < 1$ szereg jest zbieżny, jeśli $\alpha > 1$ szereg jest rozbieżny.
Jeśli $\alpha = 1$ kryterium nie rozstrzyga.

DOWÓD: Jeśli $\limsup \sqrt[n]{a_n} = \alpha < 1$ to istnieje $\beta > \alpha$ i $\beta < 1$ takie, że prawie wszystkie wyrazy ciągu $\sqrt[n]{a_n}$ spełniają

$$\sqrt[n]{a_n} < \beta \Rightarrow a_n < \beta^n \quad \sum \beta^n \text{ zbieżny.}$$

Jeśli $\limsup \sqrt[n]{a_n} = \alpha > 1$ to istnieje β : $\beta < \alpha$ i $\beta > 1$ takie, że prawie wszystkie wyrazy ciągu $\sqrt[n]{a_n}$ spełniają

$$\sqrt[n]{a_n} > \beta > 1 \quad a_n > \beta^n \quad \sum \beta^n \text{ rozbieżny}$$

PRZYKŁAD: Kryterium Cauchy'ego zastosujemy do paskudnie byleśdającego szeregu

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^{n+1}}{(2n^2+n+1)^{\frac{n-1}{2}}} a_n$$

$$\sqrt[n]{a_n} = \left(\frac{n^{n+1}}{(2n^2+n+1)^{\frac{n-1}{2}}} \right)^{\frac{1}{n}} = \frac{n^{\frac{n+1}{n}}}{(2n^2+n+1)^{\frac{n-1}{2n}}} = \frac{n \sqrt[n]{n}}{\sqrt{2n^2+n+1}} \sqrt[2n]{2n^2+n+1} =$$

$$= \sqrt{\frac{n^2}{2n^2+n+1}} \cdot \sqrt[n]{n} \sqrt[2n]{2n^2+n+1} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{2}} < 1 \text{ szereg jest zbieżny}$$

$\downarrow$ $\downarrow$ $\downarrow$
 $\frac{1}{\sqrt{2}}$ 1 1

Twierdzenie Kryterium D'Alemberta

Niech (a_n) będzie ciągiem dodatnim. Oznaczmy

$$m = \liminf \frac{a_{n+1}}{a_n} \quad M = \limsup \frac{a_{n+1}}{a_n}$$

Jeśli $M < 1$ szereg $\sum a_n$ jest zbieżny. Jeśli $m > 1$ szereg $\sum a_n$ jest rozbieżny.

Dowód: Niech $\limsup \frac{a_{n+1}}{a_n} = M < 1$. Istnieje wtedy takie $\beta < 1$ i $p > M$ takie, że

$\frac{a_{n+1}}{a_n} < \beta < 1$ dla prawie wszystkich n , ten dla $n \geq N$ dla pewnego N

$$a_{n+1} < \beta a_n < \beta^2 a_{n-1} < \dots < \beta^{n-N+1} a_N = \beta^n \left(\frac{a_N}{\beta^{N-1}} \right) \quad \sum \beta^n \text{ jest zbieżny}$$

Mozna też położyć $b_n = \beta^n$ i użyć III kryt. porównawczego.

Podobnie dowodzimy rozbieżności dla $m > 1$.

PRZYKŁAD: Kryterium d'Alemberta dobrze pasuje do szeregów, których wyrazy zawierają silnie, np:

9

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3n}{n} \right)^{-n} a_n$$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\left(\frac{3n+3}{n+1} \right)^{-n-1}}{\left(\frac{3n}{n} \right)^{-n}} = \frac{1}{7} \frac{(3n+3)! n! 2n!}{(n+1)! (2n+2)! 3n!} = \frac{1}{7} \frac{(3n+1)(3n+2)(3n+3)^3}{(n+1)(2n+1)(2n+2)} =$$

$$\xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{27}{4 \cdot 7} = \frac{27}{28} < 1 \quad \text{szereg zbieżny.}$$

Kryteria Cauchy'ego i d'Alemberta są bardzo podobne. Koją się one mogą z faktem o równości granic:

$$\lim \sqrt[n]{x_n} = \lim \frac{x_{n+1}}{x_n} \quad \text{jeśli granice po prawej stronie istnieją.}$$

Na podstawie „jednostronności” tego faktu można podejrzewać, że kryterium Cauchy'ego jest subtelniejsze. Tak też jest w istocie, a odpowiedni fakt to:

FAKT: Dla dowolnego ciągu (a_n) o wyrazach dodatnich zachodzi

$$\liminf \frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \liminf \sqrt[n]{a_n} \leq \limsup \sqrt[n]{a_n} \leq \limsup \frac{a_{n+1}}{a_n}$$

PRZYKŁAD (Fichtenholz)

$$a, b > 0 \quad \sum x_n = 1 + a + ab + a^2 b + a^3 b + a^4 b + a^5 b + a^6 b + \dots$$

$$x_0 = 1 \quad x_1 = x_0 \cdot a \quad x_2 = x_1 \cdot b \quad x_3 = x_2 \cdot a \quad \dots$$

$$x_{2n} = x_{2n-1} \cdot b \quad x_{2n+1} = x_{2n} \cdot a$$

$$\frac{x_{k+1}}{x_k} = \begin{cases} a & \text{kryterium d'Alemberta mówi więc, że szereg jest} \\ b & \text{zbieżny dla } a, b < 1 \text{ i rozbieżny dla } a, b > 1. \end{cases}$$

$$\sqrt[2n]{a^n b^n} = \sqrt{ab}, \quad \sqrt[2n+1]{a^{n+1} b^n} = a^{\frac{n+1}{2n+1}} b^{\frac{n}{2n+1}} = a^{\frac{1}{2}} a^{\frac{1/2}{2n+1}} b^{\frac{1}{2}} b^{\frac{-1/2}{2n+1}}$$

$$\sqrt[n+1]{a^{n+1} b^n} = a^{\frac{n+1}{n+1}} b^{\frac{n}{n+1}} = a^{\frac{1}{2}} a^{\frac{1/2}{2n+1}} b^{\frac{1}{2}} b^{\frac{-1/2}{2n+1}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \sqrt{ab}$$

$\downarrow$ $\downarrow$
 1 1

Kryterium Cauchy'ego mówi, że szereg zbieżny gdy $ab < 1$ i rozbieżny gdy $ab > 1$.

Dowód: Udowodnimy nierówność zaznaczoną na niebiesko. Niech $\alpha = \limsup \frac{a_{n+1}}{a_n}$. Załóżmy że $\alpha < \infty$ (dla $\alpha = \infty$ nierówność zachodzi). Dla dowolnego $\beta > \alpha$ prawie wszystkie wyrazy ciągu $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ spełniają $\frac{a_{n+1}}{a_n} < \beta$. Prawie wszystkie, czyli z pewnością wszystkie dla $n \geq N$

$$\frac{a_n}{a_{n-1}} < \beta \quad a_n < \beta a_{n-1} < \beta^2 a_{n-2} < \dots < \beta^{n-N} a_N = \beta^m \frac{a_N}{\beta^N}$$

$$a_n < \beta^m \frac{a_N}{\beta^N}$$

$$\sqrt[n]{a_n} < \beta \sqrt[n]{\frac{a_N}{\beta^N}} \quad \limsup \sqrt[n]{a_n} \leq \beta$$

$$\text{Mamy } \forall \beta > \alpha \quad \limsup \sqrt[n]{a_n} \leq \beta \Rightarrow \limsup \sqrt[n]{a_n} \leq \alpha = \limsup \frac{a_{n+1}}{a_n}$$

Na koniec jeszcze ważne własności szeregów o wyrazach dodatnich:

TWIERDZENIE

Niech $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ będzie ciągiem dodatnim i takim, że $\sum a_n$ jest zbieżny. Niech także $\pi: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ będzie bijekcją. Oznaczmy $b_n = a_{\pi(n)}$. Szereg $\sum b_n$ jest zbieżny i sumy $\sum a_n$ i $\sum b_n$ są jednakowe.

DOWÓD:

11

$$S_m = \sum_{k=1}^n a_k \quad R_m = \sum_{k=1}^m b_k = \sum_{k=1}^n a_{\pi(k)} \quad \text{Weźmy } m(k) = \max\{\pi(1), \dots, \pi(k)\}$$

$m(k) > k$ i $k \mapsto m(k)$ jest niemalejąca.

$R_m \leq S_{m(n)}$ S_n jest ograniczony, $S_{m(n)}$ też zatem $\sum b_n$ jest zbieżny.

Role $\sum a_n$ i $\sum b_n$ można zamienić biorąc $p: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ $p = \pi^{-1}$
 $l(k) = \max\{p(1), \dots, p(k)\}$. Mamy wtedy

$S_m \leq R_{l(m)}$ Oba ciągi są zbieżne do tej samej granicy. ■

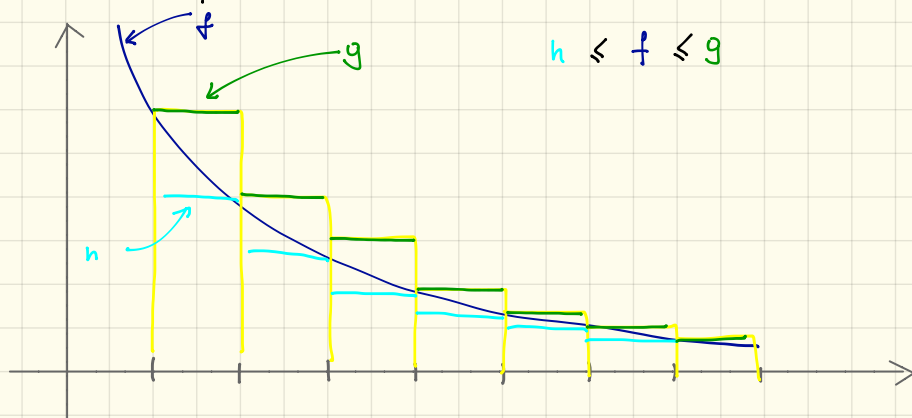
Wniosek: Szeregi o wyrazach dodatnich można sumować w dowolnej kolejności.

Zostało jeszcze jedno kryterium zbieżności szeregów:

TWIERDZENIE KRYTERIUM CAŁKOWE (Będzie później!)

Jeśli istnieje malejąca funkcja $f: [1, \infty[\rightarrow \mathbb{R}$ dodatnia taka, że $a_n = f(n)$ to szereg $\sum a_n$ jest zbieżny wtedy i tylko wtedy gdy zbieżna jest całka $\int_1^{\infty} f(x) dx$

DOWÓD:



$$\int_1^{\infty} g(x) dx = \sum_1^{\infty} a_n \quad \int_1^{\infty} h(x) dx = \sum_2^{\infty} a_n \Rightarrow g, h \text{ s\k{a} ca\k{t}kowalne wtedy i tylko wtedy gdy } \sum a_n \text{ zbie\k{z}ny.}$$

Kryterium porównawcze ca\k{t}kowalno\k{c}i daje: je\k{d}li g ca\k{t}kowalna to f ca\k{t}kowalna, zatem zbie\k{z}no\k{c}i $\sum a_n$ daje ca\k{t}kowalno\k{c} f .
 Poddanie ca\k{t}kowalno\k{c} f daje ca\k{t}kowalno\k{c} h a wi\k{e}c ca\k{t}kowalno\k{c} f daje zbie\k{z}no\k{c} $\sum a_n$ ■

Znane s\k{a} jeszcze inne kryteria zbie\k{z}no\k{c}i szereg\k{ow} - kryterium Raabeego, K\k{u}mmera, Bertranda, Gaussa. Mo\k{z}ne o nich przeczyta\k{c} w podr\k{e}czniku Fichtenholz'a (tom II)

SZEREGI O WYRAZACH DOWOLNYCH

Zajmiemy si\k{e} teraz szeregami, kt\k{ore} maj\k{a} wyrazy r\k{oz}nych znak\k{ow}. Zauwa\k{z}my przede wszystkim, \k{e} zajmowa\k{c} si\k{e} trzeba jedynie szeregami, kt\k{ore} maj\k{a} mieszk\k{on}czenie wiele wyraz\k{ow} dodatnich i ujemnych. Je\k{d}li jedynie sko\k{n}czona liczba wyraz\k{ow} jest odmiennego znaku w\k{ol}czas ci\k{e}p sum cz\k{e}\k{s}ciowych jest od pewnego miejsca monotoniczny (rosn\k{a}cy je\k{d}li prawie wszystkie wyrazy s\k{a} dodatnie, malej\k{a}cy je\k{d}li prawie wszystkie s\k{a} ujemne) i poprzednie twierdzenie mo\k{z}na stosowa\k{c}.

Zacznijmy od przyk\k{lad}u: $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n}$ - szereg anharmoniczny. Rozpatrzmy dwie podci\k{e}gi ci\k{e}p sum cz\k{e}\k{s}ciowych:

$$A_{2k} = \sum_{n=1}^{2k} (-1)^{n+1} \frac{1}{n} = \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \dots + \left(\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k}\right) = \frac{1}{2} + \frac{1}{12} + \dots + \frac{1}{2k(2k-1)}$$

$$A_{2k+1} = \sum_{n=1}^{2k+1} (-1)^{n+1} \frac{1}{n} = 1 - \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) - \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{5}\right) - \dots - \left(\frac{1}{2k} - \frac{1}{2k+1}\right) = 1 - \frac{1}{6} - \frac{1}{20} + \dots - \frac{1}{2k(2k+1)}$$

$$A_{2k} = \sum_{m=1}^k \frac{1}{2k(2k-1)} \quad A_{2k+1} = 1 - \sum_{m=1}^k \frac{1}{2k(2k+1)}$$

$$A_{2k} = \sum_{m=1}^k \frac{1}{2k(2k-1)}$$

$$A_{2k+1} = 1 - \sum_{m=1}^k \frac{1}{2k(2k+1)}$$

(A_{2k}) jest rosnący, (A_{2k+1}) malejący, $A_{2k+1} - A_{2k} = \frac{1}{2k+1}$, $A_{2k} < A_{2k+1}$.
Oba podciągi są monotoniczne i ograniczone, a więc zbieżne. Ze względu na to, iż $\lim_{k \rightarrow \infty} A_{2k+1} - A_{2k} = 0$ oba ciągi zbiegają do tej samej granicy.

Ponieważ wyrazy ciągów (A_{2k+1}) i (A_{2k}) wyczerpują łącznie wszystkie wyrazy ciągu (A_n) , także ciąg A_n jest zbieżny do wspólnej granicy. Wkrótce, wykorzystując teorię szeregów potęgowych będziemy umieli stwierdzić iż $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n} = \log 2$.

Sposób w jaki dowodziliśmy zbieżności szeregu anharmonicznego można zastosować do dowolnego szeregu postaci $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$ jeśli $a_n > 0$, a_n malejący i $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$.

Twierdzenie Kryterium Leibniza

Niech (a_n) będzie dodatnim ciągiem malejącym z granicą równą 0. Szereg $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$ jest zbieżny.

Dowód: Rozpatrujemy podciągi ciągów sum częściowych:

$$\begin{aligned} A_{2k} &= (-a_1 + a_1) + (-a_3 + a_3) + \dots + (-a_{2k-1} + a_{2k-1}) \\ &= \sum_{m=1}^k (-a_{2m-1} + a_{2m}) \\ A_{2k+1} &= -a_1 + (a_2 - a_2) + \dots + (a_{2k} - a_{2k+1}) \\ &= -a_1 + \sum_{m=1}^k (a_{2m} - a_{2m+1}) \end{aligned}$$

A_{2k} jest malejący, A_{2k+1} jest rosnący, $A_{2k+1} < A_{2k}$, $A_{2k+1} - A_{2k} = -a_{2k+1}$.
Oba podciągi są zbieżne do tej samej granicy, zatem (A_n) także jest zbieżny. ■

Przykład $\sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{n^2 \pi}{n+1}\right)$

$$\sin\left(\frac{n^2 \pi}{n+1}\right) = \sin\left(\pi \left[n + \frac{-n}{n+1} \right]\right) = \sin\left(\pi \left[m-1 + \frac{1}{m+1} \right]\right) = \sin\left((n-1)\pi + \frac{\pi}{n+1}\right) =$$

$$\sin\left(\frac{n^2\pi}{n+1}\right) = \sin\left(\pi\left[n + \frac{-n}{n+1}\right]\right) = \sin\left(\pi\left[m-1 + \frac{1}{m+1}\right]\right) = \sin\left((n-1)\pi + \frac{\pi}{n+1}\right) =$$

$$= \sin\left(\frac{\pi}{n+1}\right) \cos((n-1)\pi) + \cos\left(\frac{\pi}{n+1}\right) \sin((n-1)\pi) = (-1)^{n-1} \underbrace{\sin\left(\frac{\pi}{n+1}\right)}_{a_n}$$

14

Szereg spełnia założenie kryterium Leibniza. ■

Szereg anharmoniczny o którym mowa była wcześniej jest przykładem szeregu o którym mówimy, że jest **zbieżny warunkowo**, ten sam szereg jest zbieżny, ale szereg wartości bezwzględnych już nie.

DEFINICJA Szereg $\sum a_n$ nazywamy **zbieżnym bezwzględnie** jeśli zbieżny jest szereg $\sum |a_n|$. Jeśli $\sum a_n$ jest zbieżny lecz $\sum |a_n|$ jest rozbieżny to $\sum a_n$ nazywamy **zbieżnym warunkowo**.

FAKT Szereg bezwzględnie zbieżny jest zbieżny.

DOWÓD: Istotnie, niech S_n będzie sumą częściową szeregu $\sum |a_n|$. Ciąg ten jest zbieżny, ten spełnia warunek Cauchy'ego: $|S_n - S_m| < \varepsilon$ dla dużych n, m .

$$|S_n - S_m| = \sum_{k=m+1}^n |a_k| \quad (n > m)$$

Jeśli A_n oznacza sumę częściową dla $\sum a_n$ to

$$|A_n - A_m| = \left| \sum_{k=m+1}^n a_k \right| \leq \sum_{k=m+1}^n |a_k| = |S_n - S_m| < \varepsilon$$

Zatem (A_n) także spełnia warunek Cauchy'ego i jest zbieżny. ■

Szeregi zbieżne warunkowo mają pewną ciekawą własność o której mówi poniższe twierdzenie.

TWIERDZENIE (RIEMANN)

Jeśli $\sum a_n$ jest zbieżny warunkowo, to dla każdej liczby $s \in \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$ istnieje bijekcja $\pi: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ taka, że $\sum_{k=1}^{\infty} a_{\pi(k)} = s$.

Dowód: Załóżmy, że szereg, który jest zbieżny warunkowo musi mieć nieskończoność wiele wyrazów dodatnich i nieskończoność wiele ujemnych. W przeciwnym razie szereg byłby zbieżny bezwzględnie. Zdefiniujemy dwa zbiory:

$$N = \{a_n : a_n < 0\} \quad P = \{a_n : a_n \geq 0\}$$

15

Oba zbiory są przeliczalne, uporządkujemy je tak, by elementy N tworzyły ciąg rosnący a elementy P ciąg malejący. Mamy więc dwa ciągi P_k i N_k - pierwszy dodatni, drugi ujemny, oba mające granicę równą 0.

Zauważmy, że jeśli $\sum a_n$ jest zbieżny warunkowo to $\sum P_k = \infty$ i $\sum N_k = -\infty$. W przeciwnym razie szereg byłby zbieżny bezwzględnie.

Ustalmy teraz $s \in \mathbb{R}$. Dla ustalenia uwagi założymy, że $s > 0$. Konstruujemy szereg zbieżny do s :

(1) k_1 jest najmniejszą liczbą naturalną taką że

$$P_1 + P_2 + \dots + P_{k_1} > s$$

(2) l_1 jest najmniejszą liczbą naturalną taką że

$$\sum_{i=1}^{k_1} P_i + N_1 + N_2 + \dots + N_{l_1} < s$$

(3) k_2 jest najmniejszą liczbą naturalną większą niż k_1 i taką, że

$$\sum_{i=1}^{k_2} P_i + \sum_{i=1}^{l_1} N_i + P_{k_2+1} + \dots + P_{k_2} > s$$

(4) W czwartym kroku analogicznie konstruujemy z ujemnymi wyrazami

Konstruujemy w ten sposób szereg, który jak łatwo sprawdzić jest zbieżny do s .

Skoro bowiem a_{P_k} i a_{N_k} są monotoniczne i zbieżne do zera to znaczy że odległość sumy częściowej po wykonaniu dwóch kroków konstrukcyjnych jest mniejsza niż przed. Dokładniej, niech R_m będzie sumą częściową szeregu

który konstruujemy. Mamy $|s - R_{k_i + l_i}| < |N_{k_i}|$ oraz $|s - R_{k_{i+1} + l_{i+1}}| < |N_{k_{i+1}}| < |N_{k_i}|$

Podobnie $|s - R_{k_i + l_{i-1}}| < P_{k_i}$ oraz $|s - R_{k_{i+1} + l_i}| < P_{k_{i+1}} < P_{k_i}$

16



jest między
 P_{k_2} a N_{k_2}

$|R_n - s|$
jest między
 N_{k_1} P_{k_2}

Oba ograniczenia idą zę do zera,
Wobec tego $R_n - s \rightarrow 0$.

Bardzo podobnie prowadzimy dowód dla $s < 0$, zaczynając od elementów ciągu N_k . Nowe kolejność wyrazów ciągu (a_n) wyznacza odwrócenie π .

Jeśli $\delta = \pm \infty$ także postępujemy podobnie. Np dla $\delta = +\infty$ konstruujemy nowy szereg w taki sposób, aby w nieparzystych krokach przekraczać kolejne liczby naturalne zaś w parzystych cofać się jedynie odrobinę, np o jeden wyraz ciągu ujemnego.

PRZYKŁAD:

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \dots = \log 2$$

$$1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \frac{1}{3} - \frac{1}{10} - \frac{1}{12} - \frac{1}{14} - \frac{1}{16} + \frac{1}{5} - \dots = 0$$

↑ zadanie?

Dla szeregów liczbowych o wyrażeniu postaci $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ mamy dwie klasyczne twierdzenia podobne do odpowiednich twierdzeń o zbieżności całek niewłaściwych:

TWIERDZENIE KRYTERIUM DIRICHLETA

17

Niech $c_n = a_n b_n$ gdzie (a_n) jest ciągiem dodatnim, monotonicznie malejącym z granicą równą zero, (b_n) jest taki, że ciąg sum częściowych $B_n = \sum_{k=1}^n b_k$ jest ograniczony. Wówczas szereg $\sum c_n$ jest zbieżny.

i podobnie

TWIERDZENIE KRYTERIUM ABELA

Niech $c_n = a_n b_n$ gdzie (a_n) jest ciągiem monotonicznym i ograniczonym, (b_n) jest taki, że szereg $\sum b_n$ jest zbieżny. Wówczas szereg $\sum c_n$ jest zbieżny.

Zauważmy że biorąc w kryterium Dirichleta $b_m = (-1)^m$ otrzymujemy kryterium Leibniza.

DOWÓD: Oszacujmy daleki fragment szeregu, czyli $|S_m - S_n|$ ($m > n$)

$$\begin{aligned} S_m - S_n &= \sum_{k=n+1}^m a_k b_k = \sum_{k=n+1}^m a_k (B_k - B_{k-1}) = \sum_{k=n+1}^m a_k B_k - \sum_{k=n+1}^m a_k B_{k-1} = \sum_{k=n+1}^m a_k B_k + \\ &- \sum_{k=n}^{m-1} a_{k+1} B_k = \sum_{k=n+1}^{m-1} B_k (a_k - a_{k+1}) + a_m B_m - a_{n+1} B_m \end{aligned}$$

B_m jest ograniczony, tzn istnieje $M > 0$: $|B_n| < M$

$$\begin{aligned} |S_m - S_n| &= \left| \sum_{k=n+1}^{m-1} B_k (a_k - a_{k+1}) + a_m B_m - a_{n+1} B_m \right| \leq M \left(\sum_{k=n+1}^{m-1} a_k - a_{k+1} + a_m + a_{n+1} \right) = \\ &= M (a_{n+1} - a_{n+2} + a_{n+2} - a_{n+3} + \dots + a_{m-1} - a_m + a_m + a_{n+1}) = M \cdot 2a_{n+1} < \varepsilon \end{aligned}$$

Wiadomo, że $a_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ więc dla wystarczająco dużego n $a_n < \frac{\varepsilon}{2M}$

DOWÓD: Kryterium Abela

a_n jest monotoniczny i ograniczony, a więc zbieżny. Niech $a_\infty = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$

ciąg o wyrazach $a_\infty - a_n$ jest monotoniczny i zbieżny do zera. Założymy, że $a_\infty - a_n$ jest dodatni. Jeśli tak nie jest używamy $a_n - a_\infty$. Do szeregu

18

$\sum (a_\infty - a_n) b_n$ stosujemy kryterium Dirichleta. Wiadomo także, że zbieżny jest $\sum a_\infty b_n$. Mamy więc:

$$\sum a_n b_n = \sum a_\infty b_n - \sum (a_\infty - a_n) b_n$$

zbieżny jako suma szeregów zbieżnych ■

PRZYKŁAD: $\sum \frac{\sin n}{2n - \cos n}$

$$a_n = \frac{1}{2n - \cos n} \quad b_n = \sin n$$

$$\uparrow$$
$$a_n > 0$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$$

$2(n+1) - \cos(n+1) - 2n + \cos n = 2 - \cos(n+1) + \cos n > 0$ zatem $\frac{1}{a_{n+1}} > \frac{1}{a_n}$ czyli $a_n > a_{n+1}$ i.e. ciąg malejący

$$B_n = \sum_{k=1}^n \sin(k) = \frac{\sin\left(\frac{n}{2}\right) \sin\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\sin \frac{1}{2}} \quad \text{jest ograniczone} \quad \blacksquare$$

↑
algebra

Do rozważenia pozostał nam jeszcze problem mnożenia szeregów. O ile dodawanie szeregów i mnożenie szeregu przez liczbę to operacje proste do zdefiniowania i zbadania, o tyle mnożenie szeregów przez siebie nastręcza pewne kłopoty. Można myśleć na trzy (co najmniej) sposoby:

- (1) Mnożymy wyrazy szeregów, tzn. z szeregów o wyrazach (a_n) i (b_n) tworzymy szereg o wyrazach $c_n = a_n b_n$. Jest to sposób mało sensowny, a w każdym razie takiej operacji nie nazywałabym raczej „mnożeniem szeregów”. W szczególności suma takiego iloczynu ma niewielki związek z iloczynem sum szeregów, które wchodzi jako czynniki.

- (2) Patrzymy na szeregi jako na ciągi sum częściowych i mnożymy sumy częściowe tak jak mnożymy ciągi:

$$A_n = \sum_{k=1}^n a_k, \quad B_n = \sum_{k=1}^n b_k, \quad C_n = A_n B_n.$$

W takiej sytuacji

$$C_1 = A_1 B_1 = a_1 b_1$$

$$C_2 = A_2 B_2 = a_1 b_1 + a_2 b_1 + a_1 b_2 + a_2 b_2$$

$$C_3 = A_3 B_3 = a_1 b_1 + a_2 b_1 + a_3 b_1 + a_1 b_2 + a_2 b_2 + a_3 b_2 + a_1 b_3 + a_2 b_3 + a_3 b_3$$

$\vdots$

$$C_n = A_n B_n = \sum_{i,j=1}^n a_i b_j$$

zatem wyrazy szeregu wyglądają następująco

$$c_1 = a_1 b_1$$

$$c_2 = a_2 b_1 + a_1 b_2 + a_2 b_2$$

$$c_3 = a_3 b_1 + a_3 b_2 + a_1 b_3 + a_2 b_3 + a_3 b_3$$

$\vdots$

$$c_n = \cancel{a_1 b_n + a_2 b_n + \dots + a_n b_n} = a_n \sum_{k=1}^{n-1} b_k + b_n \sum_{k=1}^{n-1} a_k + a_n b_n$$

	a_1	a_2	a_3	a_4
b_1	$b_1 a_1$	$b_1 a_2$	$b_1 a_3$	$b_1 a_4$
b_2	$b_2 a_1$	$b_2 a_2$	$b_2 a_3$	$b_2 a_4$
b_3	$b_3 a_1$	$b_3 a_2$	$b_3 a_3$	$b_3 a_4$
b_4	$b_4 a_1$	$b_4 a_2$	$b_4 a_3$	$b_4 a_4$

Teraz mamy pewność, że jeśli szeregi-czynniki są zbieżne to iloczyn też jest zbieżny (stosowne twierdzenia dla ciągów) do iloczynowi sum czynników. Wydawałoby się, że sytuacja jest idealna, tym niemniej jest jeszcze jedna ważna koncepcja mnożenia szeregów:

- (3) **Iloczyn Cauchy'ego**, który pochodzi od problemów związanych z szeregami potęgowymi. Załóżmy, że szeregi, które mnożymy mają szczególną postać:

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n x^n, \quad \sum_{n=1}^{\infty} g_n x^n$$

gdzie (f_n) i (g_n) są pewnymi ciągami, a x jest zmienną (możemy myśleć, że rzeczywistą). Innymi słowy $a_n = f_n x^n$, $b_n = g_n x^n$. Mnożymy teraz (formalnie) nieskończone sumy grupując wyrazy przy kolejnych potęgach x :

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} f_n x^n \cdot \sum_{n=1}^{\infty} g_n x^n &= (f_1 x + f_2 x^2 + f_3 x^3 + \dots)(g_1 x + g_2 x^2 + g_3 x^3 + \dots) = \\ &= (f_1 g_1) x^2 + (f_1 g_2 + f_2 g_1) x^3 + (f_1 g_3 + f_2 g_2 + f_3 g_1) x^4 + \dots = \\ &= \sum_{n=2}^{\infty} \left(\sum_{k=1}^{n-1} f_k g_{n-k} \right) x^n. \end{aligned}$$

Patrząc na te formalne rachunki definiujemy

Definicja 2 (Iloczyn Cauchy'ego). *Iloczynem Cauchy'ego szeregów $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ i $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ nazywamy szereg, którego wyraz ogólny ma postać*

$$c_1 = 0, \quad c_n = \sum_{k=1}^{n-1} a_k b_{n-k} \text{ dla } n > 1.$$

Pozostaje oczywiście otwarty problem zbieżności tego szeregu i związek tej zbieżności ze zbieżnością szeregów-czynników.

	a_1	a_2	a_3	a_4	...
c_1	$b_1 a_1$	$b_1 a_2$	$b_1 a_3$	$b_1 a_4$	
c_2	$b_2 a_1$	$b_2 a_2$	$b_2 a_3$	$b_2 a_4$	
c_3	$b_3 a_1$	$b_3 a_2$	$b_3 a_3$	$b_3 a_4$	
c_4	$\vdots$				

Zauważmy, że sumy nieskończona rozważana w (2) i w (3) mają ostatecznie takie same zbiory wyrazów, tzn są to sumy jednomianów postaci $a_k b_l$. Różnią się jednak one istotnie kolejnością dodawania, co ma znaczenie dla szeregów zbieżnych warunkowo. Nikogo więc nie zdziwi następujące twierdzenie:

Twierdzenie 13. *Jeśli szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest bezwzględnie zbieżny do sumy A , a szereg $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ jest zbieżny do sumy B to ich iloczyn Cauchy'ego jest zbieżny do sumy AB .*

Mamy dodatkowo także twierdzenie

Twierdzenie 14. *Jeśli szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny do A , szereg $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ jest zbieżny do B oraz ponadto ich iloczyn Cauchy'ego jest zbieżny do C , to $C = AB$.*

Jeśli oba szeregi są zbieżne jedynie warunkowo mogą powstawać problemy, co pokazuje następujący przykład:

Przykład 7. Niech $a_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{(n+1)}}$. Szereg $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ jest zbieżny warunkowo (kryterium Leibniza). Policzmy iloczyn w sensie Cauchy'ego

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \sum_{n=0}^{\infty} a_n.$$

Sumujemy od 0, dla uproszczenia wzoru na wyraz ogólny iloczynu, który ma postać

$$c_n = \sum_{k=0}^n a_k a_{n-k}.$$

Przyjrzyjmy się pierwszym kilku wyrazom:

$$\begin{aligned} c_0 &= 1 \\ c_1 &= -\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}} = -\sqrt{2} \approx -1,41 \\ c_2 &= \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{1}{2} + \frac{2\sqrt{3}}{3} \approx 1,65 \\ &\vdots \end{aligned}$$

Zatem, przynajmniej początkowo, wartości bezwzględne wyrazów szeregu nie maleją. Zbadajmy dokładniej wyraz ogólny:

$$\begin{aligned} c_n &= \sum_{k=0}^n a_k a_{n-k} = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{\sqrt{(k+1)}} \frac{(-1)^{n-k}}{\sqrt{(n-k+1)}} = \\ &= \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^n}{\sqrt{(k+1)(n-k+1)}} = (-1)^n \sum_{k=0}^n \frac{1}{\sqrt{(k+1)(n-k+1)}}. \end{aligned}$$

Szacujemy $\frac{1}{\sqrt{(k+1)(n-k+1)}}$:

$$\begin{aligned} (k+1)(n-k+1) &= \left(\left(\frac{n}{2} + 1 \right) - \left(\frac{n}{2} - k \right) \right) \left(\left(\frac{n}{2} + 1 \right) + \left(\frac{n}{2} - k \right) \right) = \\ &= \left(\frac{n}{2} + 1 \right)^2 - \left(\frac{n}{2} - k \right)^2 \leq \left(\frac{n}{2} + 1 \right)^2, \end{aligned}$$

zatem

$$\frac{1}{\sqrt{(k+1)(n-k+1)}} \geq \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{n}{2} + 1 \right)^2}} = \frac{1}{\left(\frac{n}{2} + 1 \right)}.$$

Wartość bezwzględna wyrazu ogólnego c_n jest zatem oszacowana z dołu poprzez

$$|c_n| \geq \sum_{k=0}^n \frac{1}{\left(\frac{n}{2} + 1\right)} = \frac{(n+1)}{\left(\frac{n}{2} + 1\right)}.$$

Wiadomo, że

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)}{\left(\frac{n}{2} + 1\right)} = 2 \neq 0.$$

Wyraz ogólny nie może więc być zbieżny do zera. Szereg będący iloczynem Cauchy'ego szeregu $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ przez siebie nie spełnia warunku koniecznego, a to znaczy, że jest rozbieżny. ♣