TOPOLOGIA PRZESTRZENI METRYCZNYCH

Niech (X, d) będzie przestrzenią metryczną. Istnienie wyróżnionej metryki d powoduje, że podzbiory X mają bogatą strukturę. Przez kilka najbliższych wykładów zajmiemy się rodzajami zbiorów w przestrzeni metrycznej. Przypomnijmy najpierw ważną definicję: kulą otwartą o środku w x i promieniu $r>0$ nazywamy zbiór

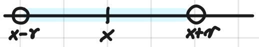
$$K(x,r) = \{ y \in X : d(x,y) < r \}$$

DEFINICJA: Zbiorem otwartym w X nazywamy taki podzbiór $\vartheta \subseteq X$ że spełniony jest warunek

$$\forall x \in \vartheta \ \exists r : K(x,r) \subset \vartheta$$

Inaczej mówiąc zbiór ϑ zawiera każdy swój punkt wraz z pewną kulą o środku w tym punkcie.

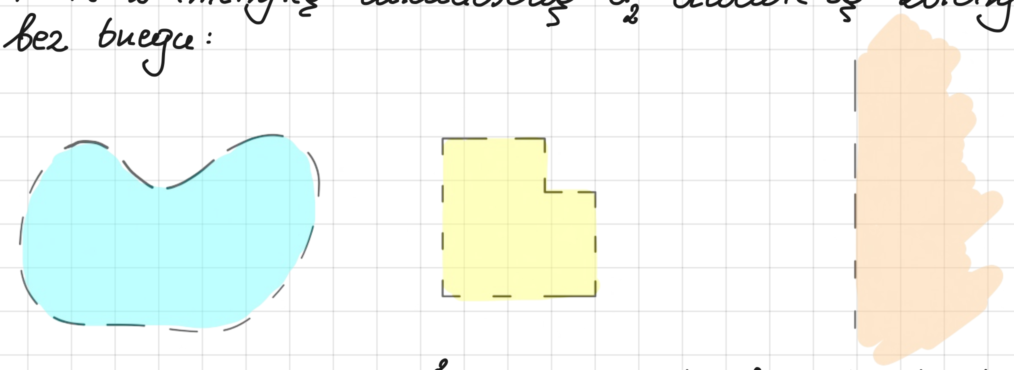
PRZYKŁAD: W $(\mathbb{R}, |\cdot - \cdot|)$ $\quad K(x,r) =]x-r, x+r[$



Odcinek bez końców $]a,b[$ jest zbiorem otwartym, podobnie półprosta $]c, \infty[$ i całe $\mathbb{R}$. Otwarty (na mocy umowy) jest również $\emptyset$ jako podzbiór $\mathbb{R}$. Istotnie, dla $x \in]a,b[$ weźmy $r = \frac{1}{2}\min\{b-r, a-r\}$. Wtedy $]x-r, x+r[\subset]a,b[$. Podobnie dla półprostej bez końca. Odcinek $[a,b[$ nie jest otwarty, gdyż dowolny odcinek o środku w a „wystaje” poza $[a,b[$

$$]a-r, a+r[\cap (\mathbb{R} \setminus [a,b[) \supset]a-r, a[\neq \emptyset$$

PRZYKŁAD: W $\mathbb{R}^2$ z metryką euklidesową d_2 otwarte są zbiory, które są „grube” i bez brzegu:



Te same zbiory są otwarte w $\mathbb{R}^2$ z metryką d_1 i d_∞. Wynika to z równoważności metryk.

PRZYKŁAD: Niech X będzie przestrzenią ograniczonych ciągów rzeczywistych z metryką supremum:

$$X = \{(x_n) : x_n \in \mathbb{R} \ ; \ \sup_n |x_n| < \infty\} \quad d((x_n),(y_m)) = \sup_{n \in \mathbb{N}} |x_n - y_n|$$

Czy zbiór $Z \subset X$ $\quad Z = \{(x_n) : \lim_{n\to\infty} x_n = 0\}$ jest zbiorem otwartym?

Okazuje się że nie – niech r będzie dowolną liczbą rzeczywistą dodatnią. Weźmy także $(x_n) \in Z$. Wówczas ciąg $y_n = \frac{r}{2} + x_n$ jest elementem kuli o środku w (x_n) i promieniu r ale

$$\lim_{n\to\infty} y_n = \frac{r}{2} \neq 0$$

W dowolnej kuli o środku w (x_n) są więc ciągi, które nie należą do Z.

STWIERDZENIE: Kula otwarta jest zbiorem otwartym.

DOWÓD:

Niech $y \in K(x,r)$ wówczas $d(x,y)<r$ weźmy $\delta = \frac{1}{2}(r-d(x,y))$. Pokażemy, że $K(y,\delta) \subset K(x,r)$. Istotnie, niech $z \in K(y,\delta)$

$$d(x,z) \leq d(x,y)+d(y,z) < d(x,y)+\delta = d(x,y)+\tfrac{1}{2}(r-d(x,y)) <$$

$$< d(x,y)+(r-d(x,y)) = r \quad \text{tzn} \quad d(x,z)<r \Rightarrow z \in K(x,r).$$

$\square$

STWIERDZENIE: Suma dwóch zbiorów otwartych jest zbiorem otwartym. Przecięcie dwóch zbiorów otwartych jest zbiorem otwartym.

DOWÓD:

Niech $\mathcal{O}$ i $\mathcal{U}$ będą otwarte. Weźmy $x \in \mathcal{O} \cup \mathcal{U}$. Jeśli $x \in \mathcal{O}$ to istnieje r takie, że $K(x,r) \subset \mathcal{O} \subset \mathcal{O} \cup \mathcal{U}$. Jeśli $x \in \mathcal{U}$ to także istnieje r takie, że $K(x,r) \subset \mathcal{U} \subset \mathcal{O} \cup \mathcal{U}$.

Uwaga: z przebiegu dowodu wynika że suma dowolnej rodziny zbiorów otwartych, także takiej mającej nieskończenie wiele elementów, jest zbiorem otwartym.

Rozważmy teraz $\mathcal{O} \cap \mathcal{U}$. Wybieramy dowolny $x \in \mathcal{O} \cap \mathcal{U}$ oraz dwa promienie: r_1 i r_2 takie, że $K(x,r_1) \subset \mathcal{O}$ i $K(x,r_2) \subset \mathcal{U}$. Oznaczmy $r = \min\{r_1,r_2\}$. Wówczas:

$$K(x,r) \subset K(x,r_1) \subset \mathcal{O} \quad i \quad K(x,r) \subset K(x,r_2) \subset \mathcal{U}, \text{ tzn } K(x,r) \subset \mathcal{O} \cap \mathcal{U}.$$

Uwaga: z przebiegu dowodu wynika, że przecięcie skończonej rodziny zbiorów otwartych jest zbiorem otwartym, natomiast nie da się tego rozszerzyć na rodziny nieskończone, np

$X = \mathbb{R}$, $d = |\cdot - \cdot|$ $\quad \mathcal{O}_n =]-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}[\quad \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{O}_n = \{0\}$ zbiór jednopunktowy nie jest otwarty w $\mathbb{R}$. $\square$

PODSUMOWANIE: WŁASNOŚCI ZBIORÓW OTWARTYCH:

(1) $\emptyset$ i X są otwarte

(2) dla dowolnej rodziny $(\mathcal{O}_\alpha)_{\alpha \in A}$ zbiorów otwartych zbiór

$$\bigcup_{\alpha \in A} \mathcal{O}_\alpha \quad \text{jest otwarty}$$

(3) dla dowolnej skończonej rodziny $(\mathcal{O}_\beta)_{\beta \in B}$ $|B| < \infty$ zbiór

$$\bigcap_{\beta \in B} \mathcal{O}_\beta \quad \text{jest otwarty.}$$

Rodzinę zbiorów spełniającą (1)–(3) nazywamy topologią. Przestrzeń z wyróżnioną taką rodziną zbiorów nazywamy przestrzenią topologiczną. Wykazaliśmy właśnie, że każda przestrzeń metryczna jest przestrzenią topologiczną.

STWIERDZENIE: Równoważne metryki zadają jednakowe topologie.

DOWÓD:

Niech ρ_1 i ρ_2 będą dwiema równoważnymi metrykami w X. Upewnijmy się co to znaczy „jednakowe topologie". Oznacza to, że jeśli zbiór jest otwarty względem metryki ρ_1 to jest otwarty względem metryki ρ_2 i odwrotnie. Metryki są równoważne jeśli istnieją a i $b \in \mathbb{R}_+$ takie, że

$$\forall x,y \quad \rho_1(x,y) \leq \overset{(**)}{a\rho_2(x,y)} \quad i \quad \rho_2(x,y) \leq \overset{(*)}{b\rho_1(x,y)}$$

Rozważmy $K_1(x,r)$ – kulę o promieniu r względem metryki ρ_1. Punkty należące do tej kuli spełniają warunek $\rho_1(x,y) < r$. Z nierówności $(*)$ wynika także że spełniają one warunek $\rho_2(x,y) \leq b\rho_1(x,y) < br$ tzn należą do kuli $K_2(x, br)$

$$K_1(x,r) \subset K_2(x,br) \quad (**)$$

Podobnie $K_2(x,r) \subset K_1(x,ar)$ $(*)$

Niech teraz zbiór $\mathcal{O}$ będzie otwarty względem ρ_1. Oznacza to, że każdy punkt x należy do $\mathcal{O}$ wraz z pewną kulą względem metryki ρ_1 o promieniu r_{1x}. Kula ta zawiera $(*)$ kulę względem metryki ρ_2 o promieniu $r_{2x} = \frac{1}{a} r_{1x}$ zatem $K_2(x, r_{2x}) \subset \mathcal{O}$. Zbiór $\mathcal{O}$ jest otwarty względem ρ_2

Podobnie, jeśli zaczniemy od zbioru $\mathcal{O}$ otwartego względem ρ_2, stwierdzimy że każdy punkt x należy do $\mathcal{O}$ wraz z kulą o promieniu P_{2x}. Z nierówności $(**)$ wynika, że kula $K_2(x, P_{2x})$ zawiera kulę $K_1(x, P_{1x})$ dla $P_{1x} = P_{2x}/a$, zatem $K_1(x, P_{1x}) \subset \mathcal{O}$. Zbiór $\mathcal{O}$ jest więc otwarty w ρ_1. □

DEFINICJA: Otoczeniem otwartym punktu $x \in X$ nazywamy każdy zbiór otwarty zawierający x. Otoczeniem punktu x nazywamy każdy zbiór zawierający x wraz pewną kulą $K(x,r)$.

DEFINICJA: Niech $A \subset X$ będzie dowolnym podzbiorem. $x \in A$ nazywamy punktem wewnętrznym X jeśli istnieje $r>0$ takie, że $K(x,r) \subset A$. Zbiór punktów wewnętrznych A oznaczamy $\mathrm{Int}(A)$ i nazywamy wnętrzem zbioru A

$x \in X$ nazywamy punktem brzegowym zbioru A jeśli spełniony jest warunek

$$\forall r>0 \quad K(x,r) \cap A \neq \emptyset \quad i \quad K(x,r) \cap (X \setminus A) \neq \emptyset$$

Zbiór punktów brzegowych A nazywamy brzegiem A i oznaczamy ∂A

x nazywamy **punktem skupienia** zbioru A jeśli spełniony jest warunek $\forall r>0 \ K(x,r)\cap A \neq \emptyset$. Zbiór punktów skupienia A nazywamy **domknięciem** A i oznaczamy $\overline{A}$.

DEFINICJA: Zbiór $A\subset X$ nazywamy **domkniętym** jeśli $\overline{A}=A$.

STWIERDZENIE: Zbiór jest domknięty wtedy i tylko wtedy gdy jego dopełnienie jest otwarte.

DOWÓD:

$\Rightarrow$ niech A będzie domknięty tzn $A=\overline{A}$. Oznaczmy $\mathcal{O}=X\setminus A$. Załóżmy, że $\mathcal{O}$ nie jest otwarty. Istnieje wtedy $x\in\mathcal{O}$ taki, że dla dowolnego $r>0$ $K(x,r)\not\subset\mathcal{O}$, tzn $K(x,r)\cap A\neq\emptyset$. Wtedy x jest punktem skupienia A, zatem $x\in A$. Otrzymaliśmy sprzeczność z warunkiem $x\in\mathcal{O}$.

$\Leftarrow$ Niech A będzie taki, że $\mathcal{O}=X\setminus A$ jest otwarty. Każdy punkt $x\in\mathcal{O}$ wchodzi do $\mathcal{O}$ wraz z pewną kulą, dokładniej

(*) $\forall x\in \mathcal{O}=X\setminus A \quad \exists r: \ K(x,r)\subset\mathcal{O}$.

Niech teraz y będzie punktem skupienia A, tzn y spełnia warunek

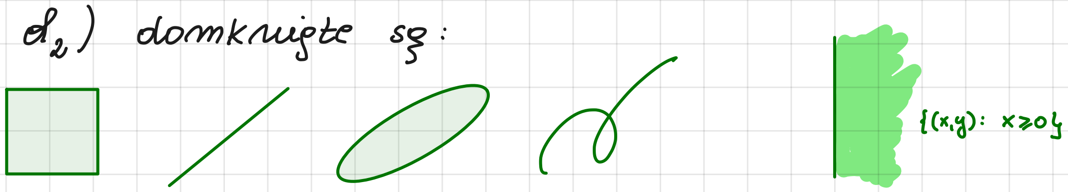
(**) $\forall r>0 \ K(y,r)\cap A\neq\emptyset$. Oznacza to, że $y\notin\mathcal{O}$ bo (*) i (**) się wzajemnie wykluczają. W takim wypadku $y\in A$, zatem A jest domknięty. $\square$

Alternatywnie możemy też myśleć, że zbiory domknięte to takie, których dopełnienia są otwarte.

PRZYKŁADY ZBIORÓW DOMKNIĘTYCH:

(1) $(\mathbb{R},|\cdot-\cdot|)$ domknięte są: odcinek domknięty $[a,b]$, półprosta domknięta $[a,\infty[$, jeden punkt $\{r\}$ ...

(2) $(\mathbb{R}^2, d_2)$ domknięte są:



(3) (X,d) **Kula domknięta jest domknięta.** Istotnie, rozważmy zbiór $X\setminus\overline{K}(x,r)$

$$X\setminus\overline{K}(x,r)=\{y\in X: \ d(x,y)>r\}$$

Niech $\delta=\frac{1}{2}(d(x,y)-r)$ Niech także $z\in K(y,\delta)$ tzn $d(y,z)<\delta$

$$d(x,y)\leq d(x,z)+d(y,z) \qquad d(x,z)\geq d(x,y)-d(y,z)>\dots$$

$$\dots>d(x,y)-\delta>d(x,y)-(d(x,y)-r)=r$$

$$d(x,z)>r \quad \text{tzn} \quad z\in X\setminus\overline{K}(x,r) \ \text{i dalej} \ K(y,\delta)\subset X\setminus\overline{K}(x,r)$$

Zbiór $X\setminus\overline{K}(x,r)$ jest otwarty $\square$

STWIERDZENIE Suma skończonej rodziny zbiorów domkniętych jest domknięta. Przecięcie dowolnej rodziny zbiorów domkniętych jest domknięte.

DOWÓD:

Podstawą dowodu są następujące fakty dotyczące dopełnień zbiorów. Niech A' oznacza $X \setminus A$

$$(A \cup B)' = A' \cap B' \quad i \quad (A \cap B)' = A' \cup B'$$

Prawa te uogólniają się na dowolną rodzinę zbiorów:

$$\Big(\bigcup_{i \in I} A_i\Big)' = \bigcap_{i \in I} A_i' \quad i \quad \Big(\bigcap_{i \in I} A_i\Big)' = \bigcup_{i \in I} A_i'$$

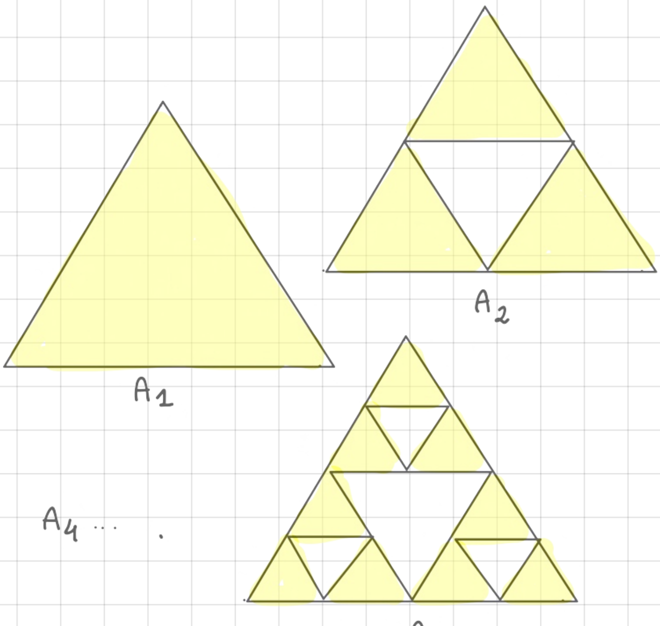
Niech teraz $A_1, \dots, A_n$ będą domknięte. Rozważamy $(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n)$. Zbiór ten jest domknięty wtedy i tylko wtedy gdy jego dopełnienie jest otwarte:

$(A_1 \cup A_2 \cup \dots A_n)' = A_1' \cap \dots \cap A_n'$. Każdy ze zbiorów A_k' jest otwarty, przecięcie skończonej rodziny zbiorów otwartych jest otwarte.

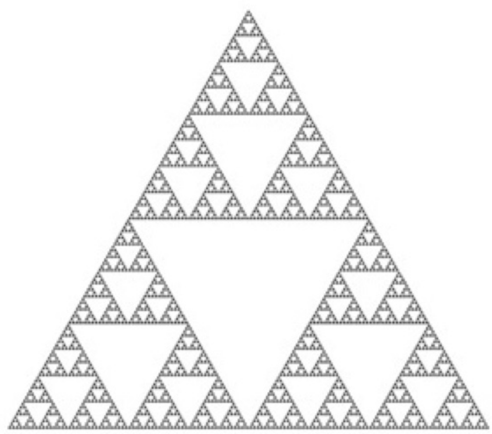
Dalej bierzemy $(A_i)_{i \in I}$ - rodzinę zbiorów domkniętych i rozważamy

$\Big(\bigcap_{i \in I} A_i\Big)' = \bigcup_{i \in I} A_i'$ Jest to suma rodziny zbiorów otwartych, a więc zbiór otwarty. Jego dopełnienie, czyli przecięcie rodziny $(A_i)_{i \in I}$ zbiorów domkniętych jest zbiorem domkniętym.

(4)



$$S = \bigcap_n A_n$$



Dywan Sierpińskiego jest zbiorem domkniętym

(5)

X - rzeczywiste ciągi ograniczone z metryką supremum, Z - ciągi zbieżne do zera. Pokażemy, że Z jest domknięty. Rozważmy $X \setminus Z$. Jeśli $(x_n) \in X \setminus Z$ to znaczy, że x_n nie jest zbieżny do 0. Zatem nieskończenie wiele wyrazów tego ciągu leży poza pewnym odcinkiem $]-\varepsilon, \varepsilon[$. Weźmy $K((x_n), \frac{\varepsilon}{2})$. Jeśli $(y_n) \in K((x_n), \frac{\varepsilon}{2})$ tzn $\sup_n |x_n - y_n| < \frac{\varepsilon}{2}$. Wyrazy ciągu (y_n) leżą nie dalej niż odpowiednie wyrazy (x_n). Jeśli nieskończenie wiele spośród nich spełnia $|x_n| > \varepsilon$ to wyrazy (y_n) z tymi samymi indeksami spełniają $|y_n| > \frac{\varepsilon}{2}$ zatem (y_n) nie jest zbieżny do zera $K((x_n), \frac{\varepsilon}{2}) \subset X \setminus Z$. $X \setminus Z$ jest otwarty więc Z domknięty.