POJĘCIE CIĄGŁOŚCI

DEFINICJA: Niech (X,d), (Y,ρ) będą przestrzeniami metrycznymi i niech $f: X \to Y$ będzie odwzorowaniem. Mówimy, że f jest ciągłe w punkcie $x_0 \in X$ jeśli spełniony jest warunek:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \forall x \in X \quad d(x, x_0) < \delta \Rightarrow \rho(f(x), f(x_0)) < \varepsilon$$

INNE SPOSOBY CHARAKTERYZACJI CIĄGŁOŚCI Dla $f: X \to Y$ następujące warunki są równoważne

(1) f jest ciągłe w x_0

(2) dla każdego otoczenia U punktu $f(x_0)$ istnieje otoczenie ϑ punktu x_0 takie, że $f(\vartheta) \subset U$

(3) jeśli U jest otoczeniem $f(x_0)$ to $f^{-1}(U)$ jest otoczeniem x_0

(4) jeśli (x_n) jest zbieżny do x_0 to $f(x_n)$ jest zbieżny do $f(x_0)$

DOWÓD: (1) ⇒ (2) Weźmy otoczenie $\mathcal{U}$ punktu $f(x_0)$. Z definicji otoczenia wynika, że $f(x_0)$ jest punktem wewnętrznym $\mathcal{U}$. Można więc znaleźć kulę o promieniu ε i środku w $f(x_0)$ taką, że $K(f(x_0), \varepsilon) \subset \mathcal{U}$. Z ciągłości f w x_0 wiemy, że do ε możemy dobrać δ taką że jeśli $d(x_0, x) < \delta$ to $\rho(f(x_0), f(x)) < \varepsilon$. W języku kul oznacza to, że jeśli $x \in K(x_0, \delta)$ to $f(x) \in K(f(x_0), \varepsilon)$. Jeszcze inaczej możemy zapisać, że

$$f(K(x_0, \delta)) \subset K(f(x_0), \varepsilon) \subset \mathcal{U}$$

Szukanym otoczeniem ϑ punktu x_0 jest więc $K(x_0, \delta)$.

(2) ⇒ (3) Weźmy otoczenie $\mathcal{U}$ punktu $f(x_0)$ i odpowiednie ϑ takie, że $f(\vartheta) \subset \mathcal{U}$ i ϑ jest otoczeniem x_0. Skoro $f(\vartheta) \subset \mathcal{U}$ to $\vartheta \subset f^{-1}(\mathcal{U})$ zatem $f^{-1}(\mathcal{U})$ także jest otoczeniem x_0.

(3) ⇒ (4) Weźmy ciąg (x_n) zbieżny do x_0 oraz otoczenie $\mathcal{U}$ punktu $f(x_0)$. Z (3) wiemy, że $f^{-1}(\mathcal{U})$ jest otoczeniem x_0, zatem $f^{-1}(\mathcal{U})$ zawiera prawie wszystkie wyrazy ciągu (x_n). W takim wypadku $\mathcal{U}$ zawiera prawie wszystkie wyrazy ciągu $f(x_n)$. Otoczenie $\mathcal{U}$ punktu $f(x_0)$ może być wybrane dowolnie, co pokazuje, że $f(x_n) \to f(x_0)$

(4) ⇒ (1) a.a. załóżmy że nie zachodzi warunek ciągłości, tzn $\exists \varepsilon > 0 : \forall \delta > 0 \; \exists x \; d(x, x_0) < \delta$ i $\rho(f(x), f(x_0)) > \varepsilon$

Weźmy teraz $\delta = \frac{1}{n}$ i niech $x_n \in K(x_0, \delta)$. Oczywiście $x_n \to x_0$ ale $\rho(f(x_n), f(x_0)) > \varepsilon$ zatem $f(x_n) \not\to f(x_0)$ co jest sprzeczne z (4) ■

$$\begin{array}{ccc} (1) & \Rightarrow & (2) \\ \Uparrow & & \Downarrow \\ (4) & \Leftarrow & (3) \end{array}$$

UWAGA: W dwóch spośród czterech równoważnych opisów ciągłości użyło się jedynie pojęć topologicznych (otoczenia) a nie metrycznych (odległości). Pojęcie ciągłości związane jest zatem z rodziną zbiorów otwartych a nie z metryką od której pochodzi. W szczególności równoważne metryki prowadzą do tych samych zbiorów odwzorowań ciągłych. 53

Powiemy że odwzorowanie $f: X \to Y$ jest ciągłe jeśli jest ciągłe w każdym punkcie przestrzeni X. Odwzorowania ciągłe to morfizmy przestrzeni topologicznych

TWIERDZENIE: Odwzorowanie $f: X \to Y$ jest ciągłe wtedy i tylko wtedy gdy przeciwobraz każdego zbioru otwartego w Y jest otwarty w X. Podobnie f jest ciągłe wtedy i tylko wtedy kiedy przeciwobraz każdego zbioru domkniętego w Y jest domknięty w X.

DOWÓD Udowodniliśmy wcześniej równoważność czterech sposobów opisywania ciągłości w punkcie - teraz możemy korzystać z któregokolwiek z nich. Zacznijmy od zbiorów otwartych:

$\Rightarrow$ Niech $f: X \to Y$ będzie odwzorowaniem ciągłym. Oznacza to, że jest ciągłe w każdym punkcie. Weźmy zbiór Θ otwarty w Y. Θ jest otoczeniem każdego swojego punktu. Jeśli $f^{-1}(\Theta) \neq \emptyset$ to z ciągłości $f^{-1}(\Theta)$ jest otoczeniem każdego swojego punktu, wobec tego $f^{-1}(\Theta)$ jest zbiorem otwartym. Jeśli $f^{-1}(\Theta) = \emptyset$ jest otwarty z definicji.

$\Leftarrow$ Załóżmy teraz, że $f^{-1}(\Theta)$ jest otwarty dla dowolnego $\Theta \subset Y$ otwartego. Weźmy $x_0 \in X$ i $\Theta \subset Y$ taki, że $f(x_0) \in \Theta$. Θ jest otwarty, więc jest otoczeniem $f(x_0)$. $f^{-1}(\Theta)$ zawiera x_0 i jako otwarty jest otoczeniem x_0 wobec tego f jest ciągłe w x_0. Wobec dowolności wyboru x_0, f jest ciągłe wszędzie.

Teraz o zbiorach domkniętych:

$\Rightarrow$ Niech f będzie odwzorowaniem ciągłym. Weźmy $D \subset Y$ zbiór domknięty. Załóżmy także, że $f^{-1}(D) \neq \emptyset$. Niech punkt x_0 będzie punktem skupienia $f^{-1}(D)$. Możemy wobec tego znaleźć ciąg elementów zbioru $f^{-1}(D)$ zbieżny do x_0. Niech (x_n) będzie takim ciągiem. Wartości $f(x_n)$ leżą w D. Z ciągłości f $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x_0)$ a z domkniętości D $f(x_0) \in D$. Wobec tego $x_0 \in f^{-1}(D)$. Wykazaliśmy, że punkty skupienia $f^{-1}(D)$ należą do $f^{-1}(D)$, wobec tego $f^{-1}(D)$ jest domknięty. 54

$\Leftarrow$ Weźmy dowolny zbiór $A \subset Y$. Rozważmy dwa zbiory: $f^{-1}(Y \setminus A)$ i $X \setminus f^{-1}(A)$

$$f^{-1}(Y\setminus A) = \{x \in X : f(x) \in Y \setminus A\} = \{x \in X : f(x) \notin A\}$$

$$X \setminus f^{-1}(A) = \{x \in X : f(x) \notin A\}$$

to samo!

$$f^{-1}(Y \setminus A) = X \setminus f^{-1}(A)$$

Niech teraz Θ będzie otwarty, $\Theta \subset Y$. $Y \setminus \Theta$ jest domknięty, wobec tego $f^{-1}(Y\setminus\Theta)$ jest domknięty. Ale $f^{-1}(Y\setminus\Theta) = X \setminus f^{-1}(\Theta)$. Jego domkniętość oznacza, że $f^{-1}(\Theta)$ jest otwarty. Z dowolności Θ wynika ciągłość f. ■

Powyższa charakteryzacja odwzorowań ciągłych jest bardzo wygodna do udowodnienia następującego faktu:

FAKT: Niech $f: X \to Y$, $g: Y \to Z$ będą odwzorowaniami trzech przestrzeni metrycznych. Wówczas (1) jeśli f jest ciągłe w x_0 i g jest ciągłe w $f(x_0)$ to $g \circ f$ jest ciągłe w x_0; (2) jeśli f i g są ciągłe to $f \circ g$ jest ciągłe.

Uzasadnienie każdy powinien być w stanie zapisać sam!

PRZYKŁADY ODWZOROWAŃ CIĄGŁYCH I NIECIĄGŁYCH:

(1) (X,d) p. metryczna

$d: X \times X \longrightarrow \mathbb{R}$ jest odwzorowaniem ciągłym

jaka metryka tu? d_1, d_∞, d_2 ?

Warunek ciągłości w punkcie $(x_0,y_0) \in X \times X$

$$\forall \varepsilon>0 \ \exists \delta : \forall (x,y) \quad d_?\big((x_0,y_0),(x,y)\big)<\delta \Rightarrow |d(x_0,y_0)-d(x,y)|<\delta$$

umieć szacować to!

Rachunki poboczne:

$$d(a,b) \leqslant d(a,c)+d(c,b) \qquad d(b,c) \leqslant d(b,a)+d(a,c)$$

$$d(a,b)-d(b,c) \leqslant d(a,c) \qquad d(b,c)-d(a,b) \leqslant d(a,c)$$

$$|d(a,b)-d(b,c)| \leqslant d(a,c)$$

$$|d(x_0,y_0)-d(x,y)| \leqslant |d(x_0,y_0)-d(x_0,y)+d(x_0,y)-d(x,y)| \leqslant$$

$$|d(x_0,y_0)-d(x_0,y)|+|d(x_0,y)-d(x,y)| \leqslant d(y_0,y)+d(x_0,x) =$$

z rachunków pobocznych.

$$= d_1\big((x,y),(x_0,y_0)\big)$$

w miejscu ? należy wziąć 1

Wystarczy użyć $\delta = \varepsilon$.

(2) $X=\mathbb{R}^2$, $Y=\mathbb{R}$, zwykła topologia

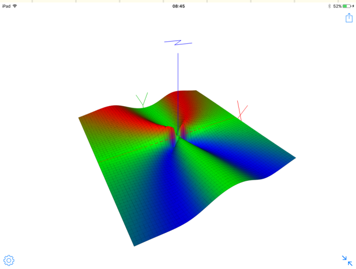
$$f(x,y)=\frac{x^2y}{x^4+y^2} \text{ dla } (x,y)\neq(0,0) \quad f(0,0)=0$$

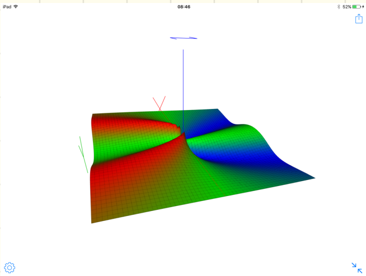
Niech $x_n \longrightarrow 0$, $a\in\mathbb{R}$ $\quad f(x_n,ax_n)=\dfrac{ax_n^3}{x_n^4+a^2x_n^2}=\dfrac{ax_n}{x_n^2+a^2}\xrightarrow{n\to\infty}0$

$y_n\to 0$, $a\in\mathbb{R}$ $\quad f(ay_n,y_n)=\dfrac{a^2y_n^3}{a^4y_n^4+y_n^2}=\dfrac{a^2y_n}{a^4y_n^2+1}\xrightarrow{n\to 0}0$

$x_n\to 0$ $\quad y_n=ax_n^2$, $a\neq 0$ $\quad f(x_n,ax_n^2)=\dfrac{ax_n^4}{x_n^4+a^2x_n^4}=\dfrac{a}{1+a^2}\neq 0$

f jest stała na parabolach $y=ax$ i różna od zera. Nie jest więc ciągła w $(0,0)$.





(3) Naturalne operacje związane z iloczynem kartezjańskim są ciągłe (X,d), (Y,ρ)

$X\times Y\xrightarrow{pr_1}X \quad (x,y)\longmapsto x \qquad$ dla $X=Y$ $\quad X\xrightarrow{\delta}X\times X$

$X\times Y\xrightarrow{pr_2}Y \quad (x,y)\longmapsto y \qquad\qquad\qquad x\longmapsto(x,x)$

Pokażemy ciągłość pr_1: Niech $\varepsilon>0$, ustalmy $(x_0,y_0)\in X\times Y$. Warunek ciągłości:

$\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0\ \forall(x,y)\ D_\infty((x,y),(x_0,y_0))<\delta \Rightarrow d(x,x_0)<\varepsilon$

$$D_\infty((x,y),(x_0,y_0))=\max\{d(x,x_0),\rho(y,y_0)\}$$

tzn $d(x,x_0) \leq D((x,y),(x_0,y_0))$. Wystarczy więc wziąć $\delta = \varepsilon$.

(4) $X = \mathbb{R}\times\mathbb{R}$ $Y=\mathbb{R}$, normalna topologia, operacje arytmetyczne są ciągłe: $(t,s) \longmapsto t+s$, $(t,s)\longmapsto ts$

$|t+s-t_0-s_0| \leq |t-t_0|+|s-s_0| < \delta$ $\longrightarrow$ metryka d_1 i $\varepsilon = \delta$

$t_n \to t_0$
$s_n \to s_0$ $\quad |s_nt_n - s_0t_0| = |s_nt_n - s_0t_n + s_0t_n - s_0t_0| \leq |t_n||s_n-s_0| + |s_0||t_n-t_0|$

(t_n) zbieżny, więc ograniczony $\quad \leq |T||s_n-s_0| + |s_0||t_n-t_0| \xrightarrow{n\to\infty} 0$

$X = \mathbb{R}\setminus\{0\}$, $Y=\mathbb{R}$ $\quad t \longmapsto \frac{1}{t}$

$t_n \to t_0$

$$\left|\frac{1}{t_n} - \frac{1}{t_0}\right| = \left|\frac{t_0-t_n}{t_0t_n}\right| = \frac{1}{t_0}\,\frac{|t_n-t_0|}{|t_n|} \leq \frac{1}{t_0}\,\frac{|t_n-t_0|}{\varepsilon} \xrightarrow{n\to\infty} 0$$

$t_0 \neq 0$ wobec tego istnieje ε: $|t_n| > \varepsilon$ dla dużych n

(5) Operacje „wektorowe" w $\mathbb{R}^n$ są ciągłe

$\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \ni (x,y) \longmapsto x+y = (x_1+y_1, x_2+y_2, \dots, x_n+y_n)$

$\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n \ni (\alpha, x) \longmapsto \alpha\cdot x = (\alpha x_1, \alpha x_2, \dots, \alpha x_n)$

WNIOSEK: z (4) i (3) oraz z ciągłości złożenia odwzorowań ciągłych wynika, że funkcje wymierne są ciągłe tam gdzie określone. Funkcja z przykładu (2) jest więc ciągła wszędzie poza wątpliwym punktem $(0,0)$, który badaliśmy oddzielnie.

(6) Funkcja rzeczywista nieciągła nigdzie

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x\in\mathbb{Q} \\ 1 & x\notin\mathbb{Q}\end{cases}$$

Funkcja rzeczywista ciągła w $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$, nieciągła w $\mathbb{Q}$

dla $x = p/q$ $f(x) = 1/q$ $\quad$ dla $x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ $f(x)=0$

CIĄGŁOŚĆ JEDNOSTAJNA

Oprócz pojęcia ciągłości w punkcie i ciągłości na zbiorze w przestrzeniach metrycznych mamy też pojęcie ciągłości jednostajnej. To pojęcie ma charakter metryczny:

DEFINICJA (X,d), (Y,ϱ) p.m. $f: X \to Y$. Mówimy, że f jest *jednostajnie ciągła* jeśli zachodzi warunek:

$$\forall \varepsilon>0 \ \exists \delta>0 \quad \forall x,x'\in X \quad d(x,x')<\delta \Rightarrow \varrho(f(x),f(x'))<\varepsilon$$

Warunek jednostajnej ciągłości jest mocniejszy niż warunek ciągłości na X. Porównajmy:

zwykła ciągłość na X:

$$\forall x_0\in X \ \forall \varepsilon>0 \ \exists \delta>0 \quad \forall x \quad d(x,x_0)<\delta \Rightarrow \varrho(f(x),f(x_0))<\varepsilon$$

jednostajna ciągłość na X

$$\forall \varepsilon>0 \ \exists \delta>0 \quad \forall x,x_0 \quad d(x,x_0)<\delta \Rightarrow \varrho(f(x),f(x_0))<\varepsilon$$

Warunki są podobne, różni je kolejność kwantyfikatorów. Liczby ε i δ muszą być dla ciągłości jednostajnej wspólne dla wszystkich punktów. Dla zwykłej ciągłości δ może zależeć od ε i x_0. Funkcja $x \mapsto e^{x}$ jest ciągła ale nie jednostajnie ciągła. Wśród wielomianów jednostajnie ciągłe są jedynie stałe i pierwszego rzędu.

Istnieje jeszcze jeden rodzaj „ciągłości" istotny przy równaniach różniczkowych: Jeśli f spełnia

$$\exists L\in\mathbb{R}: \forall x,x'\in X \quad \varrho(f(x),f(x')) \leq L\, d(x,x')$$ mówimy, że odwzorowanie jest *lipschitzowskie*, a sam warunek nazywamy warunkiem

Rudolf Lipschitz
1832 – 1903

Każde odwzorowanie lipschitzowskie jest jednostajnie ciągłe, każde odwzorowanie jednostajnie ciągłe jest ciągłe.

ZE SŁOWNIKA: Jeśli $f: X \to Y$ jest bijekcją, jest ciągła i jego odwrotność też jest ciągła, to takie odwzorowanie nazywamy homeomorfizmem. Homeomorfizmy zachowują wszelkie własności topologiczne (tzn związane ze zbiorami otwartymi). Jeśli istnieje homeomorfizm między dwiema przestrzeniami to topologicznie rzecz biorąc te przestrzenie są takie same. Dla przestrzeni metrycznych odpowiednim pojęciem jest izometria, czyli odwzorowanie zachowujące odległości między punktami.