

§ 8. Zwartość

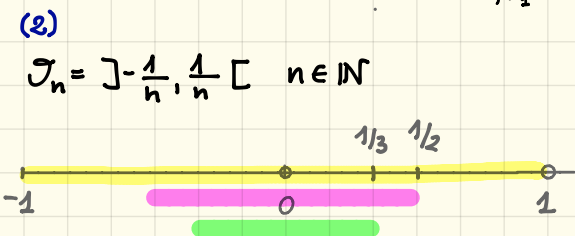
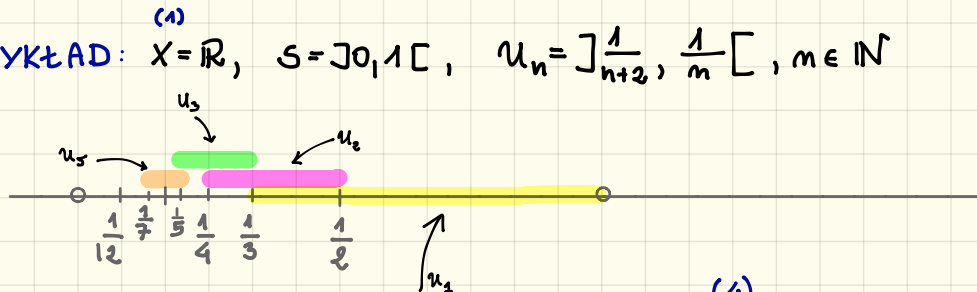
Jakąż cudowną własnością jest zwartość! Zwłaszcza w topologii różniczkowej czy algebraicznej z reguły wszystko robi się szybciej, łatwiej i pełniej, mając zwarte przestrzenie, rozmaitości, CW-kompleksy, grupy itd. I chociaż nie wszystko na świecie jest zwarte, to dla „niezwartych” problemów przypadek zwarty jest często-
kroć dobrym punktem wyjścia. Musimy najpierw opanować „zwarty teren”, który jest łatwiejszy do zdobycia, a następnie, modyfikując wypracowane już techniki, poszerzyć naszą drogę dla niezwartego przypadku. Tę regułę potwierdzają wyjątki. Niekiedy niezwartość także oferuje korzyści, dając „więcej miejsca” dla pewnych konstrukcji... Ale najpierw

DEFINICJA (zwartość). Przestrzeń topologiczną nazywamy *zwartą*, jeśli każde jej otwarte pokrycie ma skończone podpokrycie. Oznacza to, że X jest zwarta, jeśli spełniony jest następujący warunek: Jeśli $\mathfrak{U} = \{U_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ jest dowolnym otwartym pokryciem przestrzeni X , tzn. $U_\lambda \subset X$ są otwarte oraz $\bigcup_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda = X$, to istnieje skończona liczba indeksów $\lambda_1, \dots, \lambda_r \in \Lambda$ takich, że $U_{\lambda_1} \cup \dots \cup U_{\lambda_r} = X$.

(X, d) - przestrzeń metryczna, $S \subset X$

DEFINICJA: Podzbiór podzbiorów $(U_\alpha)_{\alpha \in A}$ nazywamy pokryciem zbioru S jeśli $S \subset \bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha$. Pokrycie nazywamy otwartym jeśli każdy ze zbiorów U_α jest otwarty.

PRZYKŁAD: $X = \mathbb{R}$, $S =]0, 1[$, $U_n =]\frac{1}{n+2}, \frac{1}{n}[$, $n \in \mathbb{N}$



(3)

$$D_n = [-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}] \quad n \in \mathbb{N}$$

(5)

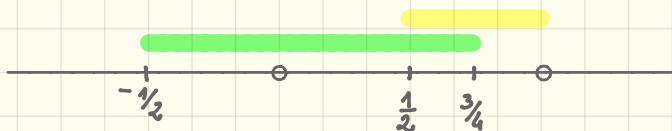
$$K_t = K(t, \varepsilon) \quad (K_t)_{t \in S}$$

(4)

$$(Q_i)_{i \in \{1, 2\}}$$

$$Q_1 =]\frac{1}{2}, \frac{3}{4}[$$

$$Q_2 =]\frac{1}{2}, \frac{3}{2}[$$



DEFINICJA: Niech $(U_\alpha)_{\alpha \in A}$ będzie pokryciem S . Jeśli $B \subset A$ jest taki, że $(U_\beta)_{\beta \in B}$ też jest pokryciem S to $(U_\beta)_{\beta \in B}$ nazywamy **podpokryciem** $(U_\alpha)_{\alpha \in A}$

PRZYKŁAD:

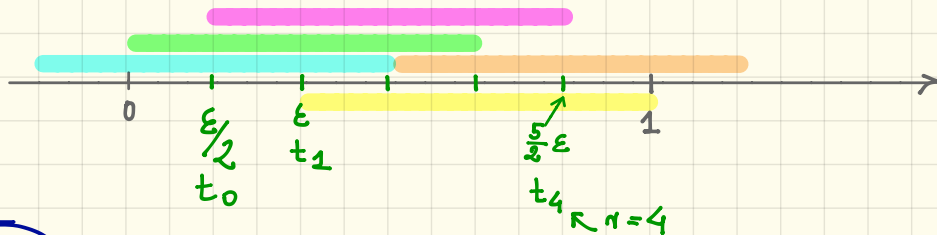
$$S =]0, 1[$$

$$K_t = K(t, \varepsilon) \quad \begin{array}{l} \varepsilon > 0 \\ \uparrow \text{ustalone} \\ t \in S \end{array}$$

Wyjściowe pokrycie

$$t_0 = \varepsilon/2, \quad t_1 = \varepsilon, \quad t_2 = \frac{3}{2}\varepsilon, \quad \dots, \quad t_k = \frac{k+1}{2}\varepsilon \quad \dots \quad t_n = \frac{n+1}{2}\varepsilon$$

$\uparrow \quad n: t_n + \varepsilon > 1$



$(K_{t_i})_{i \in \{0, \dots, n\}}$ jest podpokryciem $(K_t)_{t \in S}$

DEFINICJA: $C \subset X$ jest zwarty wtedy i tylko wtedy gdy z każdego pokrycia C można wybrać podpokrycie skończone.



Definicja dość abstrakcyjna
Co to właściwie znaczy???

PRZYKŁAD: Odcinek domknięty $[a, b] \subset \mathbb{R}$ jest zwarty

DOWÓD

$$\{\mathcal{O}_\alpha\}_{\alpha \in A} \supset [a, b]$$

dowolne pokrycie otwarte

e.d.

$\exists \varepsilon > 0 : |c-d| = \varepsilon$ i $[c, d] \subset [0, 1] \Rightarrow \exists \alpha : [c, d] \subset \mathcal{O}_\alpha$
tzn każdy przedział długości ε zawarty w $[0, 1]$ zawiera się
w całości w pewnym zbiorze pokrycia

Zauważmy, że nie, tzn

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists c, d : |c-d| = \varepsilon, [c, d] \subset [0, 1] \text{ i } \forall \alpha \quad [c, d] \not\subset \mathcal{O}_\alpha$$

↑
Weźmy $\varepsilon = \frac{1}{n}$

← oznaczmy x_n środek odcinka, tzn

$$[c, d] = \left[x_n - \frac{1}{2n}, x_n + \frac{1}{2n} \right] \subset [0, 1]$$

(x_n) - ograniczony ciąg liczbowy.

(x_n) - ograniczony ciąg liczbowy zawiera podciąg zbieżny (x_{n_k})

$$g = \lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k} \Rightarrow g \in [0, 1], \text{ bo } [0, 1] \text{ domknięty} \Rightarrow \exists \alpha : g \in \mathcal{O}_\alpha, \text{ bo } (\mathcal{O}_\alpha) \text{ pokrycie}$$

$\Downarrow$

$$\text{zauważmy, że } c_{n_k} = x_{n_k} - \frac{1}{2n_k} \rightarrow g$$

$$\text{oraz } d_{n_k} = x_{n_k} + \frac{1}{2n_k} \rightarrow g$$

$$\exists \delta > 0 :]g - \delta, g + \delta[\subset \mathcal{O}_\alpha \text{ bo } \mathcal{O}_\alpha \text{ otwarty}$$



$$\exists k_0 : \forall k > 0 \quad \left[x_{n_k} - \frac{1}{2n_k}, x_{n_k} + \frac{1}{2n_k} \right] \subset]g - \delta, g + \delta[\subset \mathcal{O}_\alpha$$

$$\Rightarrow \left[x_{n_k} - \frac{1}{2n_k}, x_{n_k} + \frac{1}{2n_k} \right] \subset \mathcal{O}_\alpha \text{ sprzeczne z d.f. } (x_n)$$



Odcinek $[a, b]$ można pokryć skończoną liczbą przedziałów długości ε : $I_1, \dots, I_n, \bigcup_{i=1}^n I_i \supset [a, b]$
 $\forall i \exists \alpha_i \in A : I_i \in \mathcal{O}_{\alpha_i} \quad (\mathcal{O}_{\alpha_i})_{i \in \{1, \dots, n\}}$ jest skończonym podpokryciem $(\mathcal{O}_\alpha)_{\alpha \in A}$ ■

UWAGA: Stwierdzenia „każdy rzeczywisty ciąg ograniczony zawiera podciąg zbieżny” dowodzimy np. metodą polowania na lwa.

STWIERDZENIE: Zbiór zwarty w przestrzeni metrycznej jest ograniczony.

DOWÓD:

Niech $C \subset X$ będzie zwarty. Weźmy $x_0 \in C$ i $U_m = K(x_0, m)$. $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ jest pokryciem X więc jest także pokryciem C . Wybieramy podpokrycie skończone odpowiadające $N \supset A = \{m_1, \dots, m_r\}$. Mamy

$$C \subset \bigcup_{n \in A} U_n = K(x_0, \max\{m_1, \dots, m_r\}) \quad \blacksquare$$

DEFINICJA: Zbiór $C \subset X$ nazywamy cięgowo zwartym jeśli każdy ciąg elementów C zawiera podciąg zbieżny do granicy w C .

STWIERDZENIE: Zbiór cięgowo zwarty jest domknięty

DOWÓD

Niech $x \in X$ będzie punktem skupienia C . Weźmy $(x_n) : x_n \in C$ i $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$. C cięgowo zwarty więc $\exists (x_{n_k}) : C \ni g = \lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k}$, ale (x_n) zbieżny do x , więc $g = x \in C$. $\blacksquare$

Warunek cięgowej zwartości jest łatwiejszy do sprawdzania niż warunek zwartości.

Twierdzenie W przestrzeni metrycznej zbiór jest cięgowo zwarty wtedy i tylko wtedy gdy jest zwarty.

Dowód $\Leftarrow$

$C \subset X$
↑
zwarty

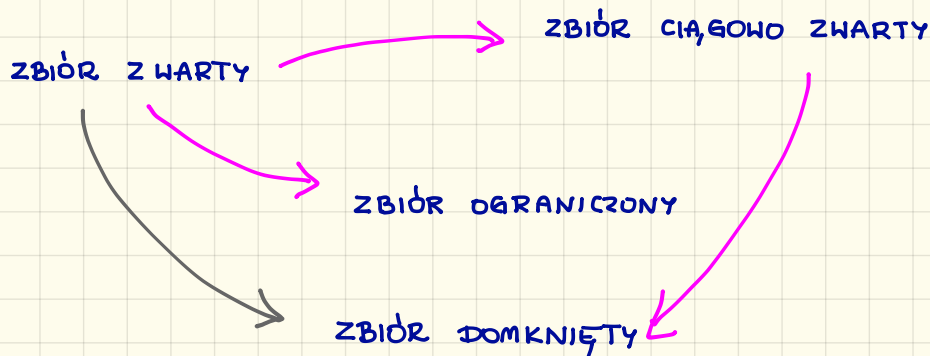
$(x_n)_{n \in \mathbb{N}} : x_n \in C$
↓

zbiór $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ ma skończoną lubo
wyczerpuje. Można z niego wybrać stół
(a więc zbieżny) podciąg.

$\square = \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ ma nieskończenie wiele wyrazów $\rightarrow$ a.a.

Założmy, że nie istnieje podciąg zbieżny do elementu w C . Oznacza to, że dla każdego $y \in C$ istnieje otoczenie U_y takie, że $U_y \cap \square$ ma skończoną liczbę wyrazów. $(\text{Int } U_y)_{y \in C}$ jest otwartym pokryciem C . Wybieramy podpokrycie skończone $(\text{Int } U_{y_i})_{i \in \{1, \dots, n\}}$. Mamy więc n zbiorów, w każdym skończoną liczbę wyrazów zbioru $\square$ – zbiór $\square$ ma skończoną liczbę wyrazów. Sprzeczne z założeniem o $\square$.

Dowód $\Leftarrow$ wymaga więcej pracy. Na razie podsumujemy:



DEFINICJA: $Y \subset X, \varepsilon > 0$ Podzbiór $S \subset Y$ nazwiemy ε -siecią dla Y jeśli

$$\forall y \in Y \exists x \in S : y \in K(x, \varepsilon)$$

+zn $(K(x, \varepsilon))_{x \in S}$ jest otwartym pokryciem Y .

LEMAT: jeśli $C \subset X$ jest cięgiście zwarty to dla dowolnego $\varepsilon > 0$ istnieje skończona ε -sieć $S \subset C$ (+zn $|S| < \infty$)

DOWÓD

$$\varepsilon > 0, x_1 \in C, U_1 = K(x_1, \varepsilon) \longrightarrow C \subset U_1 - \text{KONIEC}$$

dowolny

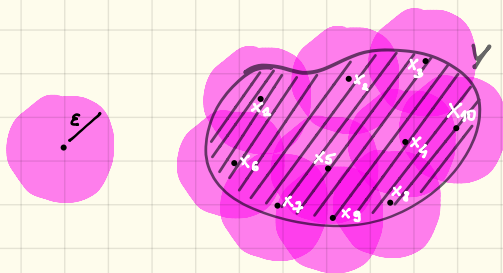
$$C \not\subset U_1$$

$$x_2 \in C \setminus U_1 \quad U_2 = K(x_2, \varepsilon) \longrightarrow C \subset U_1 \cup U_2 - \text{KONIEC}$$

$$C \not\subset U_1 \cup U_2$$

$$x_3 \in C \setminus (U_1 \cup U_2) \quad U_3 = K(x_3, \varepsilon) \longrightarrow C \subset U_1 \cup U_2 \cup U_3 - \text{KONIEC}$$

Jeśli konstrukcja zakończy się po n krokach - mamy skończoną ε -sieć. Jeśli nie mamy ciąg (x_n) w C taki że odległość dwóch różnych wyrazów jest $> \varepsilon$. Wybieramy podciąg zbieżny do $x_0 \in C$. Prawie wszystkie wyrazy podciągu są w $K(x_0, \varepsilon/2)$ oraz odległość dwóch dowolnych wyrazów $> \varepsilon \rightarrow$ sprzeczność. Konstrukcja kończy się po n krokach i mamy skończoną ε -sieć.



LEMAT: Jeśli C jest cięgowo zwarty to dla dowolnego otwartego pokrycia C istnieje $\varepsilon > 0$ taki, że dla $x \in C$ $K(x, \varepsilon)$ zawiera się w pewnym elemencie pokrycia.

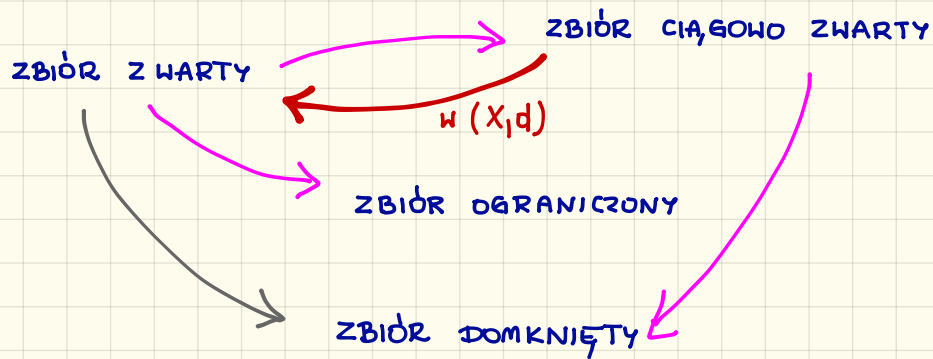
DOWÓD:

Jak dla odcinka $e \in C$. Dla $\varepsilon = \frac{1}{n}$ bierzemy x_n taki, że $K(x_n, \frac{1}{n})$ nie zawiera się w żadnym elemencie pokrycia. Z ciągu (x_n) wybieramy podciąg x_{n_k} zbieżny do $x_0 \in C$. Wtedy $x_0 \in U_\alpha$ dla pewnego α . U_α otwarty też $K(x_0, \delta) \subset U_\alpha$. Prawie wszystkie wyrazy podciągu zawarte są w $K(x_0, \frac{\delta}{2})$. Istnieje zatem k : $K(x_{n_k}, \frac{1}{n_k}) \subset K(x_0, \delta)$. Wystarczy, że $x_{n_k} \in K(x_0, \frac{\delta}{2})$ i $\frac{1}{n_k} < \frac{\delta}{2}$.

spzeczane z konstrukcją (x_n) ■

DOWÓD $\Rightarrow$

Niech $C \subset X$ cięgowo zwarty, $(U_\alpha)_{\alpha \in A}$ pokrycie otwarte C , $\varepsilon > 0$ jak w lemacie 2. Na mocy lematu (1) istnieje skończona ε -sieć S dla C . Niech $S = \{x_1, \dots, x_r\}$. $K(x_i, \varepsilon)$ zawiera się w pewnym U_{α_i} . Skoro $(K(x_i, \varepsilon))_{i \in \{1, \dots, r\}}$ jest pokryciem C to $(U_{\alpha_i})_{i \in \{1, \dots, r\}}$ też jest. Jest to skończone podpokrycie $(U_\alpha)_{\alpha \in A}$ ■



Twierdzenie W $\mathbb{R}^n$ każdy zbiór ograniczony i domknięty jest zwarty
Dowód

Normalna topologia w $\mathbb{R}^n$ jest metryczna tzn. można dowodzić ciągowej zwartości.

$D \subset \mathbb{R}^n$
 ograniczony — zawarty w pewnej kuli. W metryce d_∞ kule są kostkami.
 domknięty — oznacza to, że $D \subset [a^1, b^1] \times [a^2, b^2] \times \dots \times [a^n, b^n]$

$(x_m)_{m \in \mathbb{N}} : x_m \in D \quad x_m^i \in [a^i, b^i] \Rightarrow (x_m^i)$ zbiega podciąg zbieżny do $x_0^i \in [a^i, b^i]$

Konstruujemy zbieżny podciąg (x_m) 1. z ciągu (x_m^1) wybieramy $x_{m_k}^1$ zbieżny do x_0^1 2. z $(x_{m_k}^2)$ wybieramy podciąg $(x_{m_{k_2}}^2)$ zbieżny do x_0^2 3. ... m . Powtarzając proces otrzymujemy podciąg $x_{p(k)}$ taki że $x_{p(k)}^i \rightarrow x_0^i$. Ciąg $(x_{p(k)})$ zbiega więc do $(x_0^1, \dots, x_0^n) = x_0$. D jest domknięty więc $x_0 \in D$. ■

TWIERDZENIE: Ciągły obraz zbioru zwartego jest zwarty

DOWÓD:

$C \subset X$, $f: X \rightarrow Y$ ciągła $(U_\alpha)_{\alpha \in A}$ otwarte pokrycie $f(C)$.

$f^{-1}(U_\alpha)$ jest otwarty, $(f^{-1}(U_\alpha))_{\alpha \in A}$ jest pokryciem C . Wybieramy skończony zbiór $B \subset A$ taki, że $(f^{-1}(U_\alpha))_{\alpha \in B}$ jest pokryciem C . Wtedy naturalnie $(U_\alpha)_{\alpha \in B}$ jest pokryciem $f(C)$. ■

WNIOSEK: Rzeczywiste funkcje ciągłe na zbiorze zwartym osiąga swoje kresy.

Istotnie: $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ $f(C)$ jest zwarty a więc ograniczony i domknięty

↑
zwarty

↑
 $\sup f(x), \inf f(x)$ są skończone

↑
 $\sup f(x) \text{ i } \inf f(x) \in f(x)$

$$\exists x_\downarrow, x_\uparrow \in X : f(x_\downarrow) = \inf f(x)$$

$$f(x_\uparrow) = \sup f(x)$$

STWIERDZENIE: Domknięty podzbiór zbioru zwartego jest zwarty

DOWÓD (CIĄGŁY)

$D \subset K$
↑
domknięty
↑
zwarty

Weźmy ciąg (x_n) elementów z D . Jest to też ciąg elementów z K , więc zawiera (x_{n_k}) zbieżny do $x_0 \in K$. D jest domknięty, więc $x_0 \in D$.
 D jest cięgowo zwarty.