

WYKŁAD 8

SPÓJNOŚĆ



poznanie pewnych zabarwień emocjonalnych. Niektóre stają się nam przyjazne i pomocne, gdy kilkakrotnie doświadczymy, jak ułatwiają lub wręcz umożliwiają przeprowadzenie dowodu; inne z kolei możemy traktować nieufnie z dokładnie przeciwnych powodów. Oczywiście własności o dobrej reputacji także mogą nam niekiedy przysporzyć kłopotów; bywają wreszcie własności zupełnie ambiwalentne. Otóż mogę Was zapewnić, że spójność, hausdorffowość i zwartość są w przeważającej mierze „dobrymi własnościami”. Chciałoby się naturalnie wiedzieć, czy takie dobre własności przechodzą z „półproduktów” na „produkt końcowy” przy wykłach konstrukcjach i procesach topologicznych. Oto więc

Spójność to ostatnia własność topologiczna, którą będziemy się zajmować.

DEFINICJA: Zbiór $S \subset X$ nazywamy niespójnym jeśli istnieją zbiory S_1 i S_2 takie, że

$$S_1 \neq \emptyset, S_2 \neq \emptyset, S = S_1 \cup S_2$$

$$\overline{S_1} \cap S_2 = S_1 \cap \overline{S_2} = \emptyset$$

S_1, S_2 są
rozgraniczone

PRZYKŁAD: Jak wyglądają zbiory spójne w $\mathbb{R}$? Przedział (z n odcinkami otwartymi, domkniętymi, z jednym końcem, półprawe otwarta lub domknięta) jest zbiorem spójnym.

DOWÓD: Niech I będzie przedziałem. Załóżmy że I jest niespójny, tzn rozkłada się na sumę dwóch niepustych i rozgraniczonych zbiorów:

$$I = S_1 \cup S_2, \quad \overline{S_1} \cap S_2 = \emptyset = S_1 \cap \overline{S_2}. \quad \text{Weźmy dowolne } x_1 \in S_1, x_2 \in S_2.$$

Oczywiście $x_1 \neq x_2$ wobec tego któryś z nich musi być mniejszy. Załóżmy dla ustalenia uwagi, że $x_1 < x_2$.

$$y = \inf \{ x \in S_2 : x > x_1 \}$$



$\{x \in S_2 : x > x_1\} \subset S_2$, y jest infimum podzbioru S_2 więc jest punktem skupienia S_2 . Inaczej mówiąc $y \in \overline{S_2}$. Wiadomo zatem, że $y \notin S_1$ bo $\overline{S_1} \cap S_2 = \emptyset$. Zauważmy, że y jest także punktem skupienia S_1 , tzn $y \in \overline{S_1}$.

Istotnie, $y \neq x_1$ (bo $y \notin S_1$), zatem $y > x_1$. W tej sytuacji $[x_1, y[\subset S_1$ gdyżby bowiem istniał $z \in [a, y[$ taki, że $z \in S_2$ to byłoby to sprzeczne z definicją y . W dowolnym otoczeniu y są więc punkty z S_1 i $y \in \bar{S}_1$. Skoro tak to $y \notin S_2$ bo $\bar{S}_1 \cap S_2 = \emptyset$. Mamy więc $y \notin S_1$ i $y \notin S_2$ ale $y \in I = S_1 \cup S_2$ — sprzeczność!

Pokazaliśmy, że przedział jest spójny. Trzeba jeszcze wykazać, że każdy zbiór spójny jest przedziałem. Weźmy więc S spójny. Oznaczamy $x_1 = \inf S$, $x_2 = \sup S$. x_1 może być $-\infty$ a x_2 może być $+\infty$. Jeżeli $x_1 = x_2$ to $S = \{x_1\} = [x_1, x_1]$ i jest to przedział (choć krótki). Załóżmy więc, że $x_1 < x_2$. Mamy więc $S \subset [x_1, x_2]$. Weźmy teraz $y \in]x_1, x_2[$. Wykażemy e. e. że $y \in S$.

załóżmy więc, że $y \notin S$ i oznaczamy

$S_1 = [x_1, y[\cap S$, $S_2 =]y, x_2] \cap S$. S_1 i S_2 są niepuste, bo w dowolnej bliskości x_1 są elementy S , podobnie w dowolnej bliskości x_2 są elementy S . Jest oczywiście, że $S = S_1 \cup S_2$.

$$S_1 \subset [x_1, y[\Rightarrow \bar{S}_1 \subset [x_1, y] \text{ ponadto } S_2 \subset]y, x_2] \text{ więc } \bar{S}_1 \cap S_2 = \emptyset$$

$$S_2 \subset]y, x_2] \Rightarrow \bar{S}_2 \subset [y, x_2] \text{ ponadto } S_1 \subset [x_1, y[\text{ więc } S_1 \cap \bar{S}_2 = \emptyset$$

S jest więc niespójny — sprzeczność.

Okazuje się więc, że każdy punkt $y \in]x_1, x_2[$ należy do S , zatem S jest przedziałem. ■

STwierdzenie Ciągły obraz zbioru spójnego jest spójny.

Dowód: $f: X \rightarrow Y$ odwzorowanie ciągłe. $S \subset X$ zbiór spójny. Wykażemy e. e. że $f(S)$ spójny. Załóżmy, że nie, tzn. istnieją $Z_1, Z_2 \subset Y$ takie, że $f(S) = Z_1 \cup Z_2$ i Z_1, Z_2 są niepuste i rozgraniczone.

$$S_1 = f^{-1}(Z_1) \cap S \quad S_2 = f^{-1}(Z_2) \cap S \quad \text{Jest jasne, że } S = S_1 \cup S_2 \text{ oraz, że } S_1, S_2 \text{ są niepuste}$$

Weźmy $x \in \bar{S}_1 \cap S_2$. $x \in S_2 \Rightarrow f(x) \in Z_2$. $x \in \bar{S}_1$ tzn. $\exists (x_n): x_n \in S_1$ i $x_n \rightarrow x$.

Wtedy $f(x_n) \in Z_1$ $\lim f(x_n) = x \in \bar{Z}_1$ ale $\bar{Z}_1 \cap Z_2 = \emptyset$ więc nie istnieje $x \in \bar{Z}_1 \cap S_2$ ten $S_1 \cap S_2 = \emptyset$

Zamieniając 1 i 2 miejscami dowodzimy $S_1 \cap \bar{S}_2 = \emptyset$. Jest więc niespojny - sprzeczność. ■

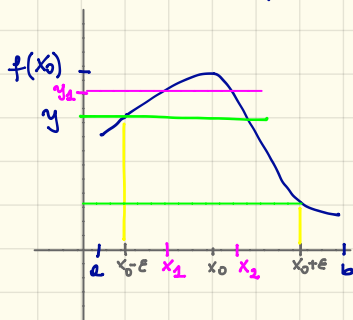
POZYTYCZNE WNIOSKI DLA FUNKCJI RZECZYWISTYCH

(1) I -przedział, f ciągła $\Rightarrow f(I)$ jest przedziałem

(2) **WŁASNOŚĆ DARBOUX** Jeśli $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ciągła to dla dowolnej liczby y pomiędzy $f(a)$ a $f(b)$ istnieje $x \in [a, b] : f(x) = y$

(3) $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ciągła iniekcja $\Rightarrow f$ osiąga kresy na końcach przedziału.

DOWÓD: Przypuśćmy że f ma maksimum w $x_0 \in]a, b[$. Weźmy $y = \max \{f(x_0 - \epsilon), f(x_0 + \epsilon)\}$ i niech $y_1 \in]y, f(x_0)[$. Na mocy własności Darboux istnieje $x_1 \in]x_0 - \epsilon, x_0[$ i $x_2 \in]x_0, x_0 + \epsilon[$ taki, że $f(x_1) = y_1 = f(x_2)$ zatem f nie jest iniekcją



(4) $f:]a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ ciągła iniekcja $\Rightarrow f(]a, b[)$ jest przedziałem, otwartym

DOWÓD Wiadomo, że $f(]a, b[)$ jest przedziałem. Niech y_0 będzie końcem $f(]a, b[)$ założmy, że $y_0 \in f(]a, b[)$. Wtedy $\exists x_0 \in]a, b[$ $f(x_0) = y_0$. Ponadto $\exists \epsilon :]x_0 - \epsilon, x_0 + \epsilon[\subset]a, b[$. Funkcja $f|_{]x_0 - \epsilon, x_0 + \epsilon[}$ osiąga kres wewnętrzny przedziału - sprzeczność.

(5) $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ jest ciągłą iniekcją $\Rightarrow f$ monotoniczna

(6) $f:]a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ ciągła iniekcja $\Rightarrow f(]a, b[) =]c, d[\Rightarrow$ istnieje

$f^{-1}:]c, d[\rightarrow]a, b[\Rightarrow f^{-1}$ jest ciągła

DOWÓD: Jeśli f jest ciągłą iniekcją to $f(]a, b[)$ jest otwartym przedziałem. Oznaczmy go $]c, d[$. $f:]a, b[\rightarrow]c, d[$ jest bijekcją więc istnieje odwzorowanie odwrotne. Jeśli $]x, y[\subset]c, d[$ to $f^{-1}(]x, y[)$ jest odcinkiem o końcach

$f(x), f(y)$. Z bijektywności wynika, że ten odcinek jest otwarty. Odcinki otwarte generują wszystkie zbiory otwarte w $\mathbb{R}$, więc ciągłości wystarczy sprawdzać na odcinkach.

DEFINICJA Zbiór nazywamy **tukowo-spojny** jeśli każde dwie punkty tego zbioru można połączyć ciągłym obrazem odcinka.

STwierdzenie Zbiór tukowo spojny jest spojny. Twierdzenie odwrotne jest fałszywe.

Dowód Załóżmy, że S jest tukowo spojny i niespojny.

$$x_1 \in S_1$$

$$x_2 \in S_2$$

$$\gamma: [0,1] \rightarrow S$$

$$\gamma(0) = x_1$$

$$\gamma(1) = x_2$$

$$S = S_1 \cup S_2$$

$$\overline{S_1} \cap S_2 = \emptyset = S_1 \cap \overline{S_2}$$

$$S_1 \neq \emptyset$$

$$S_2 \neq \emptyset$$

$$\gamma([0,1]) \text{ spojny, } I_1 = \gamma([0,1]) \cap S_1, \quad I_2 = \gamma([0,1]) \cap S_2, \quad x_1 \in I_1 \Rightarrow I_1 \neq \emptyset$$

$$x_2 \in I_2 \Rightarrow I_2 \neq \emptyset$$

$$I_1 \subset S_1, \quad \overline{I_1} \subset \overline{S_1}, \quad I_2 \subset S_2 \Rightarrow \overline{I_1} \cap I_2 = \emptyset$$

$$I_2 \subset S_2, \quad \overline{I_2} \subset \overline{S_2}, \quad I_1 \subset S_1 \Rightarrow I_1 \cap \overline{I_2} = \emptyset$$

↖ sprzeczność zę spojności $\gamma([0,1])$

Kontrykcykad na tw. odwrotne

$$X = \mathbb{R}^2, \quad S = \left\{ (0, y) : y \in [-1, 1] \right\} \cup \left\{ (x, \sin \frac{1}{x}) : x \neq 0 \right\}$$

S jest spojny ale nie tukowo spojny

