

ANALIZA I R 2019/2020

Egzamin ustny - pytania

Pytanie 1. Wyjaśnij pojęcia: relacja, odwzorowanie, relacja równoważności, klasa abstrakcji. Udowodnij, że dwie klasy abstrakcji są albo równe albo rozłączne.

Pytanie 2. Wyjaśnij pojęcia: zbiór nieskończony, zbiór przeliczalny. Udowodnij, że zbiór liczb rzeczywistych jest nieprzeliczalny.

Pytanie 3. Sformułuj i udowodnij twierdzenie Cantora dotyczące zbioru podzbiorów danego zbioru.

Pytanie 4. Udowodnij twierdzenie o istnieniu kresów zbiorów ograniczonych w $\mathbb{R}$.

Pytanie 5. Sformułuj aksjomat Archimedesesa należący do aksjomatyki ciała liczb rzeczywistych. Korzystając z aksjomatów udowodnij, że jeśli $x < y$ to istnieje liczba wymierna q taka, że $x < q < y$.

Pytanie 6. Sformułuj i udowodnij twierdzenie o ciągach monotonicznych i ograniczonych.

Pytanie 7. Sformułuj i udowodnij twierdzenie o trzech ciągach.

Pytanie 8. Sformułuj i udowodnij twierdzenia o granicy sumy, iloczynu i ilorazu ciągów zbieżnych.

Pytanie 9. Udowodnij, że ciąg Cauchy'ego w zbiorze liczb rzeczywistych jest zbieżny.

Pytanie 10. Zdefiniuj granicę górną i granicę dolną ciągu liczbowego. Znajdź granicę górną i dolną dla ciągu $x_n = \frac{n}{E(\sqrt{n})} - E(\sqrt{n})$.

Pytanie 11. Sformułuj twierdzenie Stolza. Podając przykłady uzasadnij istotność założeń.

Pytanie 12. Sformułuj kryteria porównawcze zbieżności szeregów dodatnich. Udowodnij wybrane kryterium.

Pytanie 13. Sformułuj i udowodnij kryterium Cauchy'ego zbieżności szeregów o wyrazach dodatnich.

Pytanie 14. Sformułuj i udowodnij kryterium d'Alemberta zbieżności szeregów o wyrazach dodatnich.

Pytanie 15. Sformułuj i udowodnij lemat o zagęszczaniu.

Pytanie 16. Co to znaczy, że szereg jest zbieżny warunkowo? Sformułuj i udowodnij kryterium Leibniza

Pytanie 17. Sformułuj i udowodnij twierdzenie Riemanna o szeregach zbieżnych warunkowo.

Pytanie 18. Sformułuj kryteria Dirichleta i Abela. Udowodnij jedno z nich.

Pytanie 19. Przedstaw i przedyskutuj różne koncepcje iloczynu szeregów liczbowych.

Pytanie 20. Sformułuj definicję metryki, podaj przykłady metryk. Co to są metryki równoważne? Podaj przykłady metryk równoważnych i metryk nierównoważnych na wybranym zbiorze.

Pytanie 21. Podaj definicję zbioru otwartego w przestrzeni metrycznej, sformułuj własności zbiorów otwartych. Udowodnij wybrane własności.

Pytanie 22. Podaj definicję zbioru domkniętego w przestrzeni metrycznej, sformułuj własności zbiorów domkniętych. Udowodnij wybrane własności.

Pytanie 23. Co to jest topologia? Udowodnij, że równoważne metryki zadają jednakowe topologie.

Pytanie 24. Podaj definicję zbioru zwartego w przestrzeni metrycznej. Udowodnij, że odcinek domknięty o skończonej długości w $\mathbb{R}$ jest zwarty. Można posłużyć się pojęciem ciągowej zwartości.

Pytanie 25. Podaj definicję zbioru łukowo spójnego i zbioru spójnego. Udowodnij, że odcinek w $\mathbb{R}$ jest zbiorem spójnym.

Pytanie 26. Podaj definicję (w wersji Cauchy'ego) odwzorowania ciągłego przestrzeni metrycznych. Jak zachowują się zbiory otwarte względem odwzorowań ciągłych? Sformułuj i udowodnij odpowiednie twierdzenie.

Pytanie 27. Podaj definicję (w wersji Cauchy'ego) odwzorowania ciągłego przestrzeni metrycznych. Jak zachowują się zbiory domknięte względem odwzorowań ciągłych? Sformułuj i udowodnij odpowiednie twierdzenie.

Pytanie 28. Podaj definicję (w wersji Cauchy'ego) odwzorowania ciągłego przestrzeni metrycznych. Jak zachowują się zbiory zwarte względem odwzorowań ciągłych? Sformułuj i udowodnij odpowiednie twierdzenie.

Pytanie 29. Podaj definicję (w wersji Cauchy'ego) odwzorowania ciągłego przestrzeni metrycznych. Jak zachowują się zbiory spójne względem odwzorowań ciągłych? Sformułuj i udowodnij odpowiednie twierdzenie.

Pytanie 30. Sformułuj dwie różne definicje (Heinego i Cauchy'ego) odwzorowania ciągłego w punkcie i udowodnij ich równoważność.

Pytanie 31. Sformułuj definicję jednostajnej ciągłości. Sformułuj i udowodnij twierdzenie o jednostajnej ciągłości na zbiorach zwartych.

Pytanie 32. Sformułuj definicję pochodnej funkcji w punkcie. Zapisz podstawowe reguły różniczkowania. Udowodnij wzór na pochodną iloczynu funkcji różniczkowalnych.

Pytanie 33. Sformułuj definicję pochodnej funkcji w punkcie. Zapisz podstawowe reguły różniczkowania. Udowodnij wzór na pochodną ilorazu funkcji różniczkowalnych.

Pytanie 34. Sformułuj definicję pochodnej funkcji w punkcie. Zapisz podstawowe reguły różniczkowania. Udowodnij wzór na pochodną złożenia funkcji różniczkowalnych.

Pytanie 35. Sformułuj i udowodnij twierdzenie o różniczkowaniu funkcji odwrotnej. Wprowadź wzór na pochodną funkcji artanh

Pytanie 36. Sformułuj i udowodnij twierdzenie Rolle'a.

Pytanie 37. Sformułuj i udowodnij twierdzenie Lagrange'a dotyczące rachunku różniczkowego.

Pytanie 38. Omów warunki konieczne i dostateczne istnienia ekstremum. Przedstaw odpowiednie dowody.

Pytanie 39. Sformułuj definicję funkcji wypukłej. Sformułuj i udowodnij kryterium wypukłości funkcji dwukrotnie różniczkowalnej.

Pytanie 40. Zapisz wzór Taylora, sformułuj twierdzenie Taylora. Omów zastosowania. Podaj przykłady rozwinięć podstawowych funkcji elementarnych.

Pytanie 41. Sformułuj twierdzenie zwane regułą de l'Hospitala. Udowodnij wybraną wersję.

Pytanie 42. Podaj definicję funkcji pierwotnej. Omów metody poszukiwania funkcji pierwotnej (całkowanie przez części, całkowanie przez podstawienie).

Pytanie 43. Sformułuj definicję całki Riemanna z funkcji ograniczonej na odcinku domkniętym. Podaj przykłady funkcji całkowalnych i niecałkowalnych.

Pytanie 44. Sformułuj i udowodnij kryterium całkowalności w sensie Riemanna z funkcji ograniczonej na odcinku domkniętym. Podaj przykłady funkcji całkowalnych i niecałkowalnych.

Pytanie 45. Sformułuj i udowodnij Podstawowe Twierdzenie Rachunku Różniczkowego i Całkowego.

Pytanie 46. Sformułuj i udowodnij twierdzenie o wartości średniej dla całki Riemanna.

Pytanie 47. Udowodnij, że funkcje ciągłe są całkowalne w sensie Riemanna.

Pytanie 48. Sformułuj i udowodnij twierdzenia o całkowaniu przez części i podstawienie dla całki Riemanna. Przedyskutuj istotność założeń.

Pytanie 49. Posługując się pojęciem całki Riemanna podaj definicję i wykaż podstawowe własności funkcji logarytm.

Pytanie 50. Na przykładzie całki Dirichleta omów pojęcia warunkowej i bezwzględnej zbieżności całki Riemanna.

Lista będzie uzupełniana.