Analiza IR - Zadania Liczby rzeczywiste - Rozwiązania

21 listopada 2016

Zadanie 1

a) $E(x) = x - \{x\}$, gdzie $\{x\} \in [0, 1[$. Stąd można napisać, $x + y = E(x) + E(y) + \{x\} + \{y\}$. Ale $\{x\} + \{y\} < 2$ więc $E(x + y)$ może być równe albo $E(x) + E(y)$ albo $E(x) + E(y) + 1$ (w zależności od tego, jakie są $\{x\}$ i $\{y\}$). Wnioskujemy więc, że $0 \leq E(x + y) - E(x) - E(y) \leq 1$.

b) $E(\frac{1}{n}E(nx)) = a \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \frac{E(nx)}{n} = a + b$, gdzie $b \in \{0, \frac{1}{n}, ..., \frac{n-1}{n}\} \Leftrightarrow E(nx) = an + bn \Leftrightarrow nx = an + bn + c$, gdzie $c \in [0, 1[$. Stąd $x = a + b + \frac{c}{n}$, gdzie $\frac{c}{n} + b \in \{\frac{c}{n}, \frac{c+1}{n}, ..., \frac{c+n-1}{n}\} \Leftrightarrow E(x) = a$.

c) Wyrazy sumy $\sum_{k=0}^{n-1} E(x + \frac{k}{n})$ mogą w ogólności przyjmować tylko dwie wartości: $E(x)$ i $E(x) + 1$.

$$\sum_{k=0}^{n-1} E(x + \tfrac{k}{n}) = \underbrace{E(x) + ... + E(x + \tfrac{i-1}{n})}_{i \text{ wyrazów równych } E(x)} + \underbrace{E(x + \tfrac{i}{n}) + ... + E(x + \tfrac{n-1}{n})}_{n-i \text{ wyrazów równych } E(x)+1}$$

Składniki sumy są równe $E(x)$ dla k takich, że $\{x + \frac{k}{n}\} = \{x\} + \frac{k}{n} < 1$. Jeśli więc i-ty wyraz jest ostatnim spełniającym tą nierówność, to i jest największą liczbą całkowtią taką, że $\{x\} + \frac{i}{n} < 1 \Leftrightarrow i < n + 1 - n\{x\}$. Stąd $i = E(n + 1 - n\{x\})$. Jeśli $x \in \mathbb{Z}$ to $i = n$ i tożsamość przyjmuje postać $nE(x) = E(nx)$ która jest oczywiście prawdziwa. Dla $x \notin \mathbb{Z}$ zauważmy, że $n\{x\}$ jest dodatnią liczbą rzeczywistą, więc $i = E(n + 1 - n\{x\}) = n + 1 - E(n\{x\}) - 1 = n - E(n\{x\})$. Znając i możemy zapisać lewą stronę w postaci $\sum_{k=0}^{n-1} E(x+\frac{k}{n}) = iE(x)+(n-i)(E(x)+1) = nE(x)+E(n\{x\})$. Prawa strona wynosi $E(nx) = E(n(E(x)+\{x\})) = E(nE(x)+n\{x\}) = nE(x)+E(n\{x\})$. L=P. cnd

d) Tożsamość nie jest prawdziwa dla $x < 0$, wystarczy podstawić $x = -3, 5$, żeby się o tym przekonać. Załóżmy więc, że $x \geq 0$.

1) Zastanówmy się, jak zmienia się lewa strona w miarę jak rośnie x (od 0

do nieskończoności). Składnik sumy $E(\frac{x}{2^n} + \frac{1}{2})$ ma wartość 0 na przedziale $[0, 2^{n-1}[$, ma wartość 1 na przedziale $[2^{n-1}, 3 \cdot 2^{n-1}[$ itd. Innymi słowy, wyraz $E(\frac{x}{2^n} + \frac{1}{2})$ zmienia swoją wartość dla $x = a \cdot 2^{n-1}$, gdzie a - liczba nieparzysta. Widać więc, że cała suma zmienia swoją wartość tylko wtedy, kiedy x przyjmuje wartość naturalną, tak samo jak wyrażenie po prawej stronie. Stąd wniosek, że jeśli tożsamość jest prawdziwa dla liczb naturalnych, to jest także prawdziwa dla wszystkich dodatnich liczb rzeczywistych.
2) Dowodzimy tożsamości dla $x \in \mathbb{N}$, indukcja. Dla $x = 0$ tożsamość jest prawdziwa. Załóżmy, że jest prawdą również dla k. Dla $k + 1$ po prawej stronie mamy $E(k + 1) = E(k) + 1$. Dla $x = k + 1 = b \cdot 2^l$ (b- nieparzyste) zwiększa się tylko i wyłącznie $l + 1$-wszy wyraz. Przy przejściu z k do $k + 1$ obie strony zwiększyły się o 1 - tożsamość jest prawdziwa. W dowodzie założyliśmy, że N jest dostatecznie duże. Aby tożsamość była prawdziwa dla x, gdzie $E(x) = c \cdot 2^{n_0}$ (c - nieparzyste) , N musi spełniać $N \geq n_0 + 1$.

Zadanie 2
Indukcja. Dla $n = 2$ mamy $(b'_1, b'_2) = (b_2, b_1)$ więc $\sum_{k=1}^{n} a_k b_k > \sum_{k=1}^{n} a'_k b'_k \Leftrightarrow (b_2 - b_1)(a_2 - a_1) > 0$. Teza dla $n = 2$ jest więc prawdziwa. Dla $n + 1$ mamy

$$\sum_{k=1}^{n+1} a_k b_k = \sum_{k=1}^{n} a_k b_k + a_{n+1} b_{n+1} > \sum_{k=1}^{n} a'_k b'_k + a'_{n+1} b'_{n+1}$$

Oczywiście $a_{n+1} b_{n+1} \geq a'_{n+1} b_{n+1}$ zatem z prawdziwości tezy dla n, wynika jej prawdziwość dla $n + 1$.

Zadanie 4
Rozważmy ciąg $a_n = \sqrt[n]{n+1}$. Zbadajmy jego monotoniczność. Dla $n \geq 2$ mamy $\frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{(n+1)^{\frac{1}{n}}}{n^{\frac{1}{n-1}}}$, $(\frac{a_n}{a_{n+1}})^{n-1} = \frac{1}{n}(n+1)^{\frac{n-1}{n}}$. Z nierówności Bernoulliego $(\frac{a_n}{a_{n+1}})^{n-1} \leq \frac{1}{n}(1 + n - 1) = 1$. Stąd wniosek, że również $\frac{a_n}{a_{n+1}} \leq 1$. Ostatecznie, $\sqrt[9999]{10000} > \sqrt[10000]{10001}$.