Aleksandra MUSIAK

Zadanie 4a) – ciągi

Wykazać, że

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt[100]{n^{100}+n^{99}}-n\right)=\frac{1}{100}$$

Skorzystam ze wzoru skróconego mnożenia na różnicę potęg:

$$a^k-b^k=(a-b)(a^{k-1}\cdot b^0+a^{k-2}\cdot b^1+\dots+a^1 b^{k-2}+a^0 b^{k-1}) \text{ dla } k\in\mathbb{N}$$

Wstawiając $a=\sqrt[100]{n^{100}-n^{99}}$, $b=n$, $k=100$

mamy:

$$\sqrt[100]{n^{100}+n^{99}}-n=\frac{n^{100}+n^{99}-n^{100}}{\left(\sqrt[100]{n^{100}+n^{99}}\right)^{99}+n\left(\sqrt[100]{n^{100}+n^{99}}\right)^{98}+\dots+n^{98}\left(\sqrt[100]{n^{100}+n^{99}}\right)+n^{99}}$$

W ogólności, każdy ze składników sumy w mianowniku przedstawia się jako:

$$n^i\left(\sqrt[100]{n^{100}+n^{99}}\right)^{99-i}=n^i\left(\sqrt[100]{n^{100}(1+\tfrac{1}{n})}\right)^{99-i}=$$

$$=n^i\left(n\sqrt[100]{1+\tfrac{1}{n}}\right)^{99-i}=n^i\cdot n^{99-i}\left(\sqrt[100]{1+\tfrac{1}{n}}\right)^{99-i}=$$

$$=n^{99}\left(\sqrt[100]{1+\tfrac{1}{n}}\right)^{99-i}$$

Mamy zatem

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt[100]{n^{100}+n^{99}}-n\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{n^{99}}{n^{99}\left(\left(\sqrt[100]{1+\frac{1}{n}}\right)^{99}+\left(\sqrt[100]{1+\frac{1}{n}}\right)^{98}+\dots+\left(\sqrt[100]{1+\frac{1}{n}}\right)^{0}\right)}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\left(\sqrt[100]{1+\frac{1}{n}}\right)^{99}+\dots+\left(\sqrt[100]{1+\frac{1}{n}}\right)^{0}}$$

Widzimy, że składników sumy jest dokładnie 100, oraz że dla $n\to\infty$ każdy z nich dąży do 1. Stąd

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\left(\sqrt[100]{1+\frac{1}{n}}\right)^{99}+\dots+\left(\sqrt[100]{1+\frac{1}{n}}\right)^{0}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{100}=\frac{1}{100},$$

co należało wykazać.