Zadania z Analizy II R
Ciągi i szeregi funkcyjne - 27 lutego

Zadanie 1

Wyznaczyć obszary zbieżności i funkcje graniczne podanych niżej ciągów funkcyjnych:
a) $g_n(x) = (1 + nx)^{-1}, x \geqslant 0$;
b) $h_n(x) = 2n^2xe^{-n^2x^2},\ x \in \mathbb{R}$;
c) $f_n(x) = \frac{nx}{n^2+x^2},\ x \in \mathbb{R}$;
d) $c_n(x) = \frac{nx^2+x}{nx^2+1},\ x \in (0, \infty)$.
Zbadać czy zbieżność na obszarze zbieżności jest jednostajna.

Zadanie 2

Niech f będzie granicą ciągu

$$f_n(x) = \frac{x^3 + xn^2 + x + 1}{x^4n^2 + x^4 + xn^2 + x}$$

określonego na $[1, \infty)$. Obliczyć $\int_1^\infty f(x)dx$.

Zadanie 3

Zbadać punktową, jednostajna i niemal jednostajną zbieżność szeregów funkcyjnych:
a) $\sum_{n=1}^\infty \frac{x^n}{1+x^{2n}},\ \ x \in \mathbb{R}$;
b) $\sum_{n=1}^\infty nxe^{-n^2x},\ \ x \in \mathbb{R}_+$;
c) $\sum_{n=1}^\infty \frac{x}{n^2+x^2},\ \ x \in \mathbb{R}$.

Zadanie 4

Niech $f_n(x) : [1, \infty) \to \mathbb{R}$ dane będzie przez

$$f_n(x) := \begin{cases} \frac{1}{x}, & x \in [n, n+1) \\ 0, & x \text{ pozostałe} \end{cases}.$$

Pokazać, że szereg $\sum_{n=1}^\infty f_n(x)$ jest zbieżny jednostajnie na $[1, \infty)$.

Zadanie 5

Niech $f(x) = \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^2+x^2},\ \ x \in \mathbb{R}$. Udowodnić, że f jest różniczkowalna.